इकाई 11 संख्याओं पर चर्चा

इकाई की रूपरेखा पृष्ठ संख्या

11.1 परिचय

उद्देश्य

11.2 सूत्र विधियों पर एक सूक्ष्म दृष्टि

अन्य उपयोगी सूत्रविधियाँ

सूत्रविधि के उपयोग में गलतियां

11.3 भिन्न सम्बंधी सूत्रविधियाँ

जोड़ और घटाना की सूत्रविधि

गुणा और भाग की सूत्रविधि

11.4 अनुमान

11.5 सारांश

11.6 अभ्यासों पर टिप्पणियां

11.1 परिचय

इस इकाई में हम इस तरह के प्रश्नों पर चर्चा करेंगे कि "क्या सूत्रविधि को सीखना और अवधारणा को सीखना एक ही बात है या क्या एक क्रिया से सम्बंधित एक ही सूत्रविधि होती है या एक क्रिया के लिए एक से अधिक सूत्रविधियां हो सकती हैं?" इस व्यापक संदर्भ को ध्यान में रखते हुए सूत्रविधियाँ सीखने का सम्बंध उन दो प्रकार की जानकारियों से भी जोड़कर देखेंगे जिनके बारे में आप खंड–1 में पढ़ चुके हैं अर्थात् अवधारणात्मक ज्ञान और प्रक्रियागत ज्ञान। हम आपको यह बताना चाहते हैं कि एक सूत्रविधि लिख लेना और उसे दी गयी संख्याओं पर लागू कर देना ही यह समझने के लिए पर्याप्त नहीं है कि विभिन्न सवाल कैसे हल किए जाएंगे। अतः इस इकाई में प्रश्न हल करने में सूत्रविधियों का उपयोग करने की प्रक्रिया को ध्यान पर हम यह समझाएंगे कि किसी सूत्रविधि के प्रत्येक चरण पर क्या सिद्धांत निहित है।

तब संभवतः आपके लिए यह समझना आसान होगा कि क्यों भिन्नों से सम्बंधित सूत्रविधियां कठिन मानी जाती हैं। हमने भिन्न और उनसे सम्बंधित सूत्रविधियां सिखाने के आम तरीकों की बात की थी। और यह भी बताया था कि बच्चे बगैर समझे इनका मशीनी ढंग से उपयोग करते हैं। इस इकाई में हम विशेष तौर पर भिन्नों की विभिन्न सूत्रविधियों से जुड़े विषयों की चर्चा करेंगे और विभिन्न उपयोग की अवधारणात्मक व्याख्या पर ध्यान देंगे। हम ऐसी उपयुक्त शिक्षण विधियों के भी सुझाव देंगे जिनसे आप बच्चों को सूत्रविधियों के उपयोग की समस्याओं से निपटने में मदद दे पाएं।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आपः

- किसी सूत्रविधि के मशीनी ढंग से उपयोग और उसे अवधारणात्मक रूप में समझने के बीच अंतर बता पाएंगे।

- यह पहचान पाएंगे कि भिन्नों की विभिन्न क्रियाओं में सूत्रविधि को समझ पाने में बच्चों को क्या कठिनाइयां आती हैं और कुछ आम कठिनाइयों से परिचित भी हो पाएंगे;
- छोटे बच्चों को विभिन्न क्रियाओं की सूत्रविधियां सिखाने के उपयोगी तरीक़े सुझा पाएंगे;
- भिन्नों के साथ क्रियाओं के परिणाम का अनुमान लगाने की क्षमताएं विकसित करने में बच्चों को मदद दे पाएंगे।

11.2 सूत्रविधियों पर एक सूक्ष्म दृष्टि

पहले हम यह देखेंगे कि सामान्य रूप से सूत्रविधि होती क्या है? इसके बाद हम गणित सीखने में सूत्रविधियों के महत्व पर चर्चा करेंगे। विभिन्न क्रियाओं को करते हुए हममें से अधिकांश ने सूत्रविधि (एल्गोरिद्म) शब्द सुना होगा। **किसी प्रश्न को हल करने की सूत्रविधि का अर्थ उस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने की पूरी चरण–दर–चरण प्रक्रिया है**। जैसे, किसी 3 अंकों की संख्या को 2 अंकों की संख्या से गुणा करने की चरण–दर–चरण प्रक्रिया एक सूत्रविधि है। इसी प्रकार से भिन्नों और दशमलव भिन्नों की क्रियाओं से जुड़े प्रश्न हल करने के लिए भी अलग–अलग सूत्रविधियां होती हैं।

आगे बढ़ने से पहले हम चाहेंगे कि आप कुछ अभ्यास कर लें।

E1) भिन्नों से सम्बंधित पांच सूत्रविधियां लिखिए।

E2) क्या सूत्रविधियां केवल चार बुनियादी क्रियाओं के लिए ही हैं? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

आइए अब सूत्रविधियों से जुड़े कुछ मुद्दों पर विचार करें।

? प्राथमिक विद्यालय में किसी सूत्रविधि को कैसे प्रस्तुत किया जाता है और किस ढंग से उसके साथ काम किया जाता है?

? क्या पाठ्यपुस्तक और कक्षा की प्रक्रिया बच्ची को यह मौका देती है कि वह अवधारणा की छानबीन कर सके और प्रश्न हल करने के विभिन्न चरणों की तलाश कर सके?

? क्या यह सही है कि पाठ्यपुस्तक में एक विशिष्ट प्रक्रिया दी जाती है, जिसका उपयोग करके उत्तर तक पहुंचना है?

जब बच्चों को जोड़ सिखाना होता है, तो अधिकांश पाठ्यपुस्तकों और कक्षाओं में उनसे कहा जाता है कि वे अंक–दर–अंक जोड़ें। नतीजा यह होता है कि उन्हें सम्बंधित संख्याओं की कोई धारणा नहीं होती और वे आम तौर पर प्रक्रिया की जानकारी में फंसे रहते हैं। हमने देखा ही है कि यह जोड़ की क्रिया की अवधारणात्मक समझ से कितना अलग है। किसी सूत्रविधि में दी गई प्रक्रिया को जानने का मतलब यह नहीं है कि बच्ची ने वह क्रिया समझ ली है या यह समझ लिया है कि वह सूत्रविधि क्यों कारगर है। इसके विपरीत, यदि बच्ची की अवधारणात्मक समझ अच्छी है तो इससे उसे विभिन्न परिस्थितियों में सूत्रविधि को उपयोग करने में मदद मिलेगी और शायद वह सूत्रविधि विकसित भी कर पाए।

उपरोक्त चर्चा का निचोड़ क्या है? पहले कि सूत्रविधि संख्याओं के बीच कोई क्रिया है। यानी सूत्रविधि को समझने के लिए हमें सम्बंधित चीज़ों को समझना होगा। फिर बच्ची के मन में संख्याओं की एक धारणा होनी चाहिए और यह समझ होनी चाहिए कि उस क्रिया

का अर्थ क्या है और उत्तर लगभग कितना आएगा? इसके बाद सूत्रविधि के प्रत्येक चरण को समझना और यह समझना ज़रूरी है कि इन चरणों की क्या आवश्यकता है। और अन्ततः सही उत्तर प्राप्त करना तो आता ही है।

आइए जोड़ का उदाहरण लेकर इस बात को समझने का प्रयास करें। यदि मैं आपसे पूछूं कि 34 और 57 को जोड़ने के कितने तरीक़े हैं, तो आप क्या कहेंगे ? क्या इसका एक ही तरीक़ा है ? क्या IV के बच्चों के एक समूह से बातचीत के दौरान उनसे जल्दी से यह बताने को कहा गया कि 17 गुना 3 कितना होगा। जल्दी से समवेत स्वर में उत्तर मिला 51। जब उनसे पूछा गया कि उन्होंने कैसे पता किया, तो उत्तर इस प्रकार थे :

एक बच्ची : सरल है। मैंने 30 और 21 को जोड़ दिया।

एक अन्य बच्ची : मुझे उत्तर पता था क्योंकि हमने 20 तक पहाड़े याद किए गए हैं।

अब बच्चों से पूछा गया कि 47 + 48 कितना होगा।

क्या तुम बता सकते हो कि 47 + 48 कितना होगा।

एक बच्ची (जल्दी से) : 95. पहले 40 + 40 कर लो और फिर 7 + 8।

एक और बच्ची : मैं पहले 45 + 45 करके फिर 5 जोडूंगी।

हम देखते हैं कि अलग–अलग बच्चे अलग–अलग ढंग से प्रश्न हल करते हैं, जो भी उन्हें ज़्यादा सुविधाजनक लगे। मैं पक्का कह सकती हूं कि यदि आपसे 49 + 49 करने को कहा जाता तो आपका तरीक़ा और भी अलग हो सकता था।

किन्तु यदि हम इन उदाहरणों को ज़्यादा बारीकी से देखें तो पाएंगे कि ये संख्याओं के बारे में एक समृद्ध खज़ाने का संकेत देते हैं। इससे 10 और 5 के गुणज के उपयोग का पता चलता है, यह पता चलता कि 7 + 8 वास्तव में 15 के विभाजन का एक तरीका है। शायद बच्चों में यह भी क्षमता होती है कि वे अलग–अलग प्रश्नों के लिए अलग–अलग तरीक़ा अपना सकते हैं। यह लचीलापन अवधारणात्मक ज्ञान का एक महत्वपूर्ण अंग है। निम्नलिखित प्रश्न पर ध्यान कीजिए :

$$\frac{548+548+548+548}{4}$$

इसको उत्तर निकालने के लिए वास्तव में किसी गणना की ज़रूरत नहीं है। यदि व्यक्ति को अवधारणात्मक ज्ञान है तो इसका उत्तर स्पष्ट (obvious) है। यदि कोई व्यक्ति मशीनी ढंग से सूत्रविधि और प्रक्रिया का मार्ग अपनाए तो पहले उसे सारे 548 को जोड़ने की मेहनत करनी होगी और फिर एक लम्बा भाग करना होगा।

किन विभिन्न तरीकों से हमारा अवधारणात्मक ज्ञान दर्शा सकता है कि उपरोक्त प्रश्न के लिए जोड़ने और फिर भाग देने की प्रक्रिया अपनाने की ज़रूरत नहीं है। एक तो यह हो सकता है कि 548 का बार–बार दोहराया जाना हमारे इस ज्ञान को कुरेद सकता है कि गुणा वास्तव में बार–बार किया जाने वाला जोड़ ही है। हम यह भी देखते हैं कि गुणक 4 है (क्योंकि 548 पूरे 4 बार आया है) और यह भाजक के बराबर है। ये तथ्य हमें इस बात की याद दिला देते हैं कि भाग दरअसल गुणा का विलोग है। एक स्पष्ट अवधारणात्मक ज्ञान होने पर अनायास ही, उपयुक्त परिस्थिति सामने आने पर सारे सम्बंधित तथ्य उपयोग

के लिए ध्यान में आ जाते हैं। हो सकता है कि दिमाग में और भी कई कड़ियां (connection) होती है जो सब यही बताती हैं कि वास्तव में ये सारे गुणा–भाग करने की कोई आवश्यक नहीं है। अगले अभ्यास करते हुए इन कड़ियों के बारे में सोचिए।

E3) ऐसे 2 और उदाहरण लिखिए जिनमें अवधारणात्मक समझ होने पर उत्तर आसान हो जबकि यदि सिर्फ प्रक्रियागत ज्ञान का उपयोग किया जाए तो हल लम्बा हो।

E4) किसी बच्ची को सूत्रविधि इस ढंग से पढ़ाने के पांच नुकसान गिनाइए जिसमें वह उस सूत्रविधि को केवल मशीनी ढंग से उपयोग करना सीख पाए।

सार रूप में, हमने देखा कि यदि बच्ची सम्बंधित गणितीय तर्क को समझती है तो कई सवालों को हल करने में उसकी सहजता व कार्यक्षमता बढ़ती है।

यदि यह सही है तो फिर सूत्रविधि क्यों चाहिए? क्या सूत्रविधि सिखाने का कोई कारण नहीं है? और वह क्या बात है जो इन सूत्रविधियों को इतना सशक्त बनाती है और क्यों सूत्रविधियां उपयोगी हैं?

इन मुद्दों को समझने के लिए, चलिए याद करते हैं कि हम क्रियाएं (गणितीय क्रियाएं) कैसे करते हैं। जब हमें दो संख्याओं को जोड़ना हो, तो कई बार हम किसी विधि का इस्तेमाल किए बगैर मन ही मन उन्हें जोड़ लेते हैं। किन्तु यदि दो बड़ी–बड़ी संख्याओं को जोड़ना हो या कई संख्याओं को जोड़ना हो, तो हम मन में नहीं कर सकते। हम हमेशा यह तो नहीं कर सकते कि हर बार इस्तेमाल करने के लिए कोई तरीक़ा खोजते रहें या जोड़ी गई संख्याओं को याद रखने की कोई रणनीति विचारते रहें। इसलिए हमें एक विश्वसनीय व सामान्य सूत्रविधि की ज़रूरत होती है – एक ऐसी विधि जो हर स्थिति में काम करे। जोड़ की जो स्तम्भ विधि हम स्कूल में सीखते हैं वह इस तरह बनाई गई है कि आम तौर पर सामने आने वाली पूर्ण संख्याओं का कोई भी जोड़ हम उसकी मदद से कर सकते हैं। इसी प्रकार से घटाना गुणा और भाग की सूत्रविधियां भी सामान्य विधियां हैं और ये पूर्णांक संख्याओं की इन क्रियाओं के लगभग सभी मामलों पर लागू होती हैं। ये विधियां बहुत सामान्य प्रकृति की हैं और इन्हें आसानी से दशमलव संख्याओं पर भी लागू किया जा सकता है।

यदि ये विधियां इतनी सामान्य न होतीं तो हमारे लिए बहुत मुश्किल हो जाता और यह समझने में कठिनाई होती कि ये क्यों काम करती हैं। इनकी सामान्य प्रकृति ही इन विधियों को इतना सशक्त बनाती है।

अगली बात हम इस पर ध्यान देंगे कि किसी सूत्रविधि को ठीक तरह से उपयोग करने के विभिन्न पक्ष क्या हैं? यह आप तौर पर माना जाता है कि अभ्यास करने से सूत्रविधियों पर महारत हासिल होती है। किन्तु क्या यही एकमात्र ज़रूरी तत्व है ? अभ्यास किस तरह का चाहिए और हमें किन अन्य बातों पर विचार करना होगा ? आपने पूर्व में देखा ही था कि किसी बच्ची को एक सूत्रविधि पर आधारित कई एक जैसे सवाल मशीनी ढंग से हल करने को कहना, बच्ची को उस सूत्रविधि में दक्ष बानाने की अच्छी रणनीति नहीं है। **(इन क्षमताओं को विकसित करने का सबसे महत्वपूर्ण पहलू यह है कि बच्चों को सूत्रविधि के हर चरण को समझने के पर्याप्त मौक़े दिए जाते हैं।)** बच्चों के सामने सूत्रविधि के आम प्रस्तुतिकरण में विभिन्न मध्यवर्त्तीय चरणों पर कोई चर्चा नहीं की जाती और न ही प्रस्तुति को अलग–अलग अवस्थाओं में विभाजित करके सूत्रविधि के उपयोग के प्रमुख चरण स्पष्ट किए जाते हैं कि बच्ची इन विभिन्न चरणों का तर्क समझ सके। हममें से अधिकांश लोग इसकी परवाह नहीं करते क्योंकि इन्हें विभिन्न चरणों का तर्क समझ

सके। हममें से अधिकांश लोग इसकी परवाह नहीं करते क्योंकि इन्हें महत्वपूर्ण समझा ही नहीं जाता। हम तो यह मानते हैं कि बच्चों पर इस सबका बोझ नहीं डालना चाहिए वरना वे भ्रमित होकर गलतियां करेंगे। इन मान्यताओं से निम्न प्रश्न उठते हैं :

? क्या बच्चे हर चरण में निहित तर्क को समझने की क्षमता रखते हैं? क्या इससे उन्हें मदद मिलेगी? क्या इससे भ्रम और ग़लतियों में वृद्धि होगी ?

(इन प्रश्नों के कोई स्वतः स्पष्ट उत्तर नहीं हैं, जिन्हें हम सब स्वीकार कर लें। यह सम्बंधित सूत्रविधि की प्रकृति पर भी निर्भर होगा किन्तु इतना तो हम सब जानते हैं कि जब सूत्रविधियां बच्ची के दिमाग में इकट्ठी होती रहती हैं, तो वे एक–दूसरे में हस्तक्षेप करती हैं। तब बच्ची चरण भूलने लगती है और बड़ी–बड़ी भूलें कर बैठती है।) तो हम क्या कर सकते हैं ? मेरे एक मित्र का तर्क है, "मेरे विचार से यह आवश्यक है कि बच्चे सूत्रविधि के हर चरण को समझें। यह हो सकता है कि वे इसे फौरन न समझ पाएं। परन्तु हमें उपयुक्त रणनीति बनानी चाहिए ताकि बच्चों को विभिन्न चरणों का उपयुक्त अनुभव मिल पाए। इन विचारों को सम्प्रेषित करने के लिए, हो सकता है कि हमें तरह–तरह की ऐसी चीज़ों का उपयोग करना पड़े, जिन्हें हाथों से हिला सकते हैं, मोड़ सकते हैं, आदि। कभी–कभी इन चरणों के लिए किसी अवधारणा की समझ की ज़रूरत होगी, जो पहले ही सीखी जानी चाहिए। ऐसे मामलों में हमें यह जांच कर लेना होगा कि बच्ची के पास ज़रूरी ज्ञान है या नहीं। जैसे– आपने देखा ही है कि गुणा की सूत्रविधि सीखने के लिए स्थानीय मान की समझ ज़रूरी है, यह समझना ज़रूरी है कि गुणा बार–बार किया जाने वाल जोड़ है आदि।"

आइए अब कुछ ऐसी सूत्रविधियां देखें जिनका प्रयोग आम तौर पर नहीं किया जाता।

11.2.1 अन्य उपयोगी सूत्रविधियां

आइए, गुणा की कुछ ऐसी विधियां देखते हैं जो आम तौर पर विद्यालयों में नहीं सिखाई जातीं।

सूत्रविधि 1 : रूसी किसानों का गुणा

नीचे की तालिका में हमने दर्शाया है कि इस विधि की मदद से 437 में 37 का गुणा कैसे करते हैं।

1	437	←		
2	874			
4	1748	←	1	437
8	3496		+ 4	+ 1748
16	6992		+ 32	+ 13984
32	13984	←	37	16169

यहां दर्शाई सूत्रविधि में पहाड़ों का ज्ञान बिल्कुल आवश्यक नहीं है। आपको सिर्फ़ इतना पता होना चाहिए कि संख्या को दुगना कैसे करें। जिन संख्याओं को गुणा करना है उनमें से बड़ी संख्या (यहां 437) से शुरू कीजिए। इसको दुगना करके 874 आएगा। अब 874

को दुगना करके 1748 आएगा। बॉक्स में दर्शाई तालिका जैसी बना लीजिए। ध्यान दें कि यह दरअसल 437 के पहाड़े की कुछ संख्याओं को दिखा रहे हैं: 437×1, 437×2, 437×4 वगैरह। हम यह तालिका तब तक आगे बढ़ाते हैं जब तक कि बाएं स्तम्भ की कुछ संख्याओं का योग 37 न हो जाए। 37 से ही तो हमें गुणा करना है। वर्तमान सवाल में हम 32 पर रुक गए क्योंकि हमें $32 + 4 + 1$ को जोड़कर 37 मिल जाएगा। अब हमें सिर्फ इतना करना है कि दाएं स्तम्भ की उन संख्याओं को जोड़ लें जिनके सामने तीर का निशान है। इस सूत्रविधि को निम्नानुसार प्रस्तुत किया जा सकता है :

$$437 \times 37 = 437 \times (32 + 4 + 1) = 437 \times 32 + 437 \times 4 + 437 \times 1$$
$$= 13984 + 1748 + 437 = 16169$$

———x———

चित्र 1: इस विधि का उपयोग करती एक किसान औतर

नोट : गुणा की इस विधि का उपयोग प्राचीन रूसी किसान किया करते थे। आज भी एशिया और यूरोप के कुछ इलाकों में आप लोग इसका उपयोग करते हैं।

क्या हम इस सूत्रविधि का उपयोग किन्हीं भी दो पूर्णांक संख्याओं के गुणा के लिए कर सकते हैं ? अगले अभ्यासों में आप इसी बात की जांच करें।

E5) बॉक्स के पहले स्तम्भ की सभी संख्याएं 2 के घात में हैं। यदि हम किसी भी संख्या को 2 के घात वाली संख्याओं के योग के रूप में दर्शा सकें तो उपरोक्त सूत्रविधि सामान्य है और इसे किन्हीं भी दो पूर्णांक संख्याओं के गुणा के लिए इस्तेमाल किया जा सकता है। आप दी गई किसी संख्या को 2 की घात के जोड़ के रूप में कैसे दर्शाएंगे?

E6) इस सूत्रविधि से परिचित कराए जाने से पहले किसी बच्ची को क्या–क्या पता होना चाहिए? यह विधि मानक विधि से सरल है या कठिन?

अब हम सूत्रविधियों के उपयोग में ग़लतियों की चर्चा करेंगे।

11.2.2 सूत्रविधि के उपयोग में ग़लतियां

गणित पढ़ाते हुए हम देखते हैं कि बच्चे सूत्रविधियों का उपयोग करते हुए प्रायः ग़लती कर बैठते हैं। इस पाठ्यक्रम में हमने कई बार यह कहा है कि शिक्षकों के लिए बच्चों की ग़लतियों से सीखना चाहिए। सूत्रविधियों का उपयोग करते समय बच्चों द्वारा की जाने वाली ग़लतियां हमें क्या बताती हैं ?

सूत्रविधियों के इस्तेमाल में की गई ग़लतियों के अध्ययन से पता चलता है कि कई ग़लतियों में एक क्रम होता है। ये ग़लतियां प्रायः एक ही तरीके की होती हैं और इनका पूर्वानुमान किया जा सकता है। हो सकता है कि इनमें से कुछ ग़लतियां ज़्यादा बच्चे करें, जबकि कुछ ग़लतियां थोड़े से बच्चे करें किन्तु यह जानना उपयोगी है कि इन ग़लतियों में एक क्रम है और यदि कोई बच्ची एक ग़लती करेगी तो अनुमान लगाया जा सकता है कि वह और कौन–कौन सी ग़लतियां करेगी। यह जानने से हम शिक्षक के रूप से बच्चों में सीखने की प्रक्रिया के प्रति अधिक संवेदनशील हो पाएंगे और उनकी सीखने की क्षमता के प्रति अधिक आवश्स्त भी हो पाएंगे। ग़लतियों में निहित क्रम की समझ के अलावा इससे हमें यह भी पता चलता है कि बच्ची क्या–क्या सही कर लेती है और हम उसके द्वारा सूत्रविधि के उपयोग में की जाने वाली प्रक्रियागत ग़लतियां भी पहचान पाते हैं। यदि शिक्षक यह समझ पाए कि बाकी सब ठीक है और मात्र प्रक्रिया में कहीं कोई ग़लती है तो बच्ची से बातचीत की जा सकती है। यहां यह कहना उचित है कि शुरुआती दौर में बच्ची द्वारा विधि के उपयोग में की जा रही ग़लती को सुधारना संभव है। किन्तु यदि यही छोटी सी ग़लती न पहचानी जाए तो यह मन में बैठ जाती है। इसके बाद जब बच्ची ज़्यादा जटिल विधियों का उपयोग करती है तो पूरी तरह उलझकर रह जाती है।

हमने इस पाठ्यक्रम के दौरान देखा है कि गणित शिक्षण में प्रक्रियागत और अवधारणात्मक, दोनों तरह के ज्ञान पर ध्यान देना ज़रूरी है। किसी गणितीय क्रिया की सुपरिभाषित सूत्रविधि से परिचित कराने से पूर्व यह ज़रूरी है कि छात्रों को ठोस प्रतीकों के माध्यम से सम्बंधित गणितीय क्रिया से परिचित कराया जाए ताकि उनके दिमाग में अवधारणा विकसित हो पाए। यह भी मददगार होता है कि जब बच्चे प्रतीकात्मक सूत्रविधि में थोड़ी दक्षता हासिल कर चुकें तो उनके सामने एक बार फिर वह क्रिया ठोस रूप में प्रस्तुत की जाए। कक्षा में छात्रों को किसी गणितीय क्रिया से परिचित कराने के कई तरीके हैं। ये तरीके काफी सामान्य हैं–ये सिर्फ भिन्नों पर ही वरन् गणित के कई विषयों पर लागू होते हैं। क्रियाएं सीखने की विभिन्न अवस्थाओं में इन विभिन्न प्रतीकों का मिला–जुला उपयोग मददगार होता है।

अगले खण्ड में हम देखेंगे कि भिन्नों की क्रियाएं समझने में मदद देने के कुछ तरीके।

11.3 भिन्न सम्बंधी सूत्रविधियां

हम भिन्न की क्रियाओं से सम्बंधित सूत्रविधियों की चर्चा पहले कर ही चुके हैं। वहां हमने कुछ आम ग़लतियों और उन्हें सुधारने के तरीकों की बात की थी। यहां हम जोड़ और घटाना की सूत्रविधियों से सम्बंधित ग़लतियों पर नज़र डालेंगे।

हम उम्मीद करते हैं कि हाई स्कूल में प्रवेश लेने वाले बच्चे भिन्नों के जोड़, घटाना, गुणा और भाग के प्रश्न कर पाएंगे। किन्तु छात्रों की जांच करते समय हम मात्र सूत्रविधियों पर उनकी दक्षता पर ही ध्यान देते हैं। यदि कोई छात्र इन सूत्रविधियों के उपयोग में ग़लती

करे तो हम निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि वह भिन्न की समझ में कमज़ोर है। आम तौर पर यह आसानी से पता लगाया जा सकता है कि किस ढंग की प्रक्रियागत ग़लती हुई है। आइए, प्राथमिक कक्षाओं के बच्चों द्वारा दिए गए दो उत्तरों पर ध्यान दें।

उत्तर 1

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{8}=\frac{8}{14}$$

उत्तर 2

$$\frac{7}{9}-\frac{2}{3}=\frac{5}{27}$$

E7) उपरोक्त प्रत्येक उत्तर में बच्चों ने उत्तर तक पहुंचने में किस प्रक्रिया का उपयोग किया होगा?

E8) तीन अन्य ऐसी ग़लतियों के उदाहरण दीजिए जो आपने देखी हों। यह भी बताइए कि उन उत्तरों तक पहुंचने में छात्र ने किस तर्क का सहारा लिया होगा?

ये अभ्यास करते आपने ध्यान दिया होगा कि उत्तर 2 में बच्चों ने अलग–अलग क्रियाओं की विधियों को मिला दिया है।

सूत्रविधि का उपयोग करते समय विभिन्न सूत्रविधियों को मिला देना एक प्रमुख विषय के रूप में उभरता है। सूत्रविधि का उपयोग करते समय इस ग़लती को संभालने पर विशेष ध्यान दिया जाना चाहिए।

उत्तर 1 में समस्या सूत्रविधि को ग़लत ढंग से लागू करने की है। सूत्रविधि लागू करते समय इस ग़लती पर ध्यान देना भी एक विषय है।

उपरोक्त स्थितियों के अलावा ऐसे भी कुछ मामले होते हैं जिनमें ग़लतियों का कोई क्रम नहीं होता। ऐसे मामले प्रायः सूत्रविधि को लागू करने में हताशा के कारण उत्पन्न होते हैं। किन्तु ऐसे मामलों में स्थिति उतनी गंभीर नहीं होती।

यदि हम भिन्नों को हल करने के बारे में सोचें, तो पता चलता है कि चार में से कोई भी क्रिया करते हुए कई सूत्रविधियों का ध्यान रखना होता है। किन्तु बच्चों का काम मात्र इतनी सूत्रविधियों से नहीं चलेगा।

चार बुनियादी क्रियाओं की विधियों के अलावा कई अन्य सूत्रविधियां हैं :

क) एक भिन्न पर क्रियाएं

1) तुल्य भिन्न पता करना
2) सरलतम रूप में बदलना
3) विषम भिन्न को मिश्रित भिन्न में या मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में बदलना
4) भिन्न को दशमलव संख्या में या दशमलव संख्या को भिन्न में बदलना

ख) दो या दो से अधिक भिन्नों की क्रियाएं, जैसे तुलना।

स्पष्ट है कि उलझन के अवसर बहुत ज़्यादा है क्योंकि कई विभिन्न परिस्थितियां ऐसी होती हैं जिनमें छात्रों को थोड़ी–सी अलग सूत्रविधि का उपयोग करना होता है। यदि इसकी वजह से छात्रों के दिमाग में होने वाले भ्रम को कम करना है, तो ज़रूरी होगा कि भिन्नों के बारे में उनकी अवधारणात्मक समझ को स्पष्ट किया जाए।

तो, बच्चे सूत्रविधि को सही ढंग से इस्तेमाल करना कैसे सीख सकते हैं ? अब हम इसी पर चर्चा करेंगे।

11.3.1 जोड़ और घटाना की सूत्रविधि

प्रारम्भ भिन्नों को जोड़ने की सूत्रविधि से करते हैं। जैसे, $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ पर ग़ौर करते हैं।

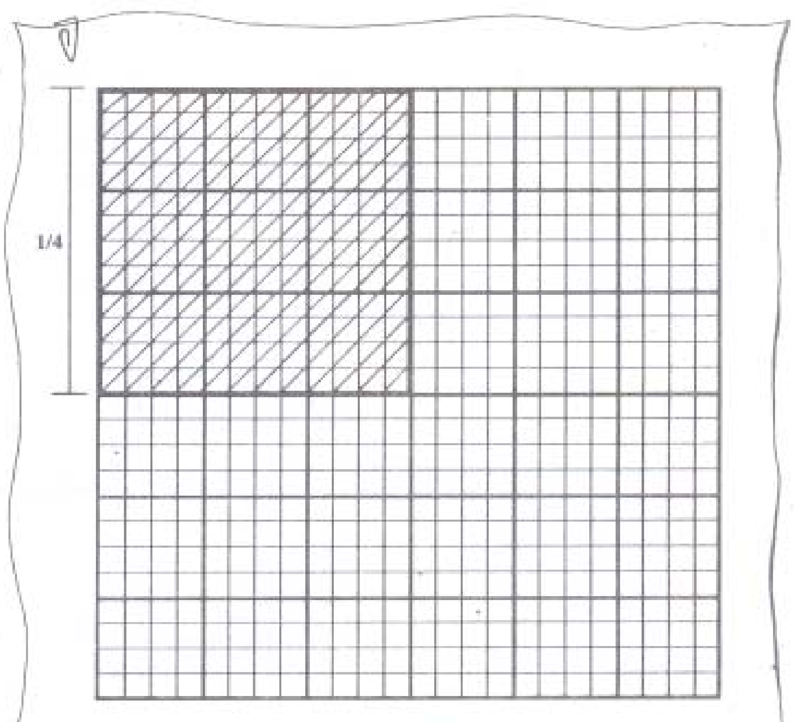
हम जानते है। इसे करने के दो तरीके हैं

1) उलट गुणा से, यानी $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1\times6+1\times4}{24}=\frac{10}{24}$

2) लघुत्तम समापवर्त्य के उपयोग से, यानी पहले 4 और 6 का लघुत्तम समापवर्त्य निकालें जो 12 आएगा और फिर उत्तर $\frac{5}{12}$ प्राप्त करें।

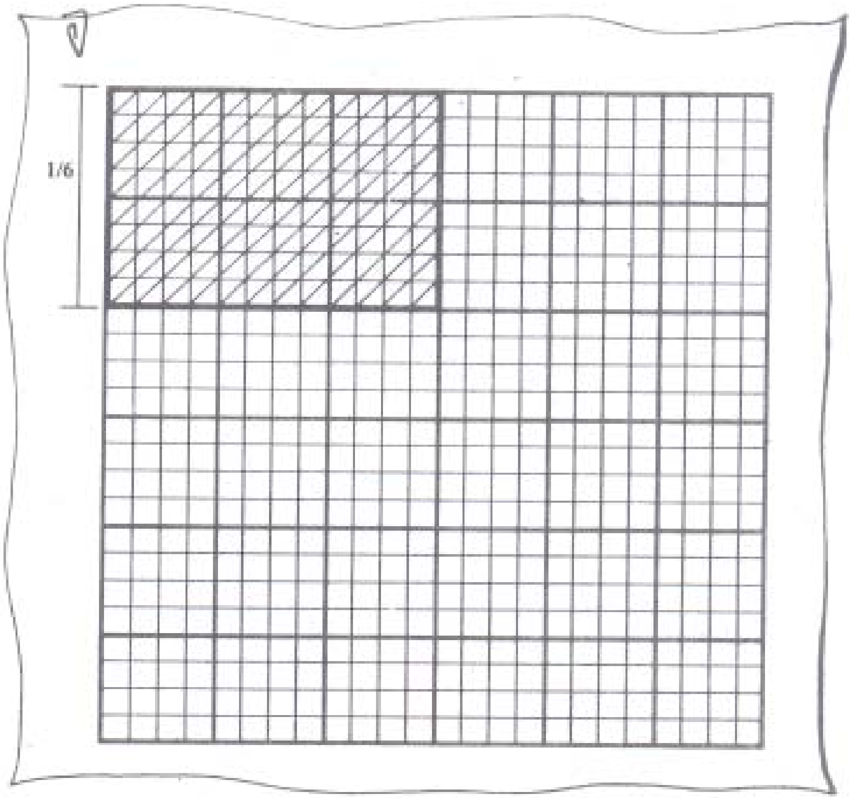
क्या आप मुझे बता सकते हैं कि ये दोनों विधियां एक ही उत्तर क्यों देती हैं? अर्थात इनसे हमें दो तुल्य भिन्नें क्यों मिलती हैं ? आप एक गतिविधि के ज़रिए यह बात बच्चों को कैसे बता सकते हैं ? यहां एक गतिविधि उदाहरण के तौर पर दी जा रही है।

बराबर आकार के दो बड़े वर्ग बनाइए (चित्र में दर्शाए अनुसार बड़े चौखाने वाले ग्राफ कागज़ का उपयोग किया जा सकता है– देखें चित्र 2(क) 2(ख)।



चित्र 2 (क)

मान लीजिए कि $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{6}$ को जोड़ना चाहते हैं। बच्चों से कहिए कि वे प्रत्येक ग्राफ कागज़ पर $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{6}$ भाग रंग दे। देखें चित्र 2(क) और चित्र 2(ख)।



चित्र 2 (ख)

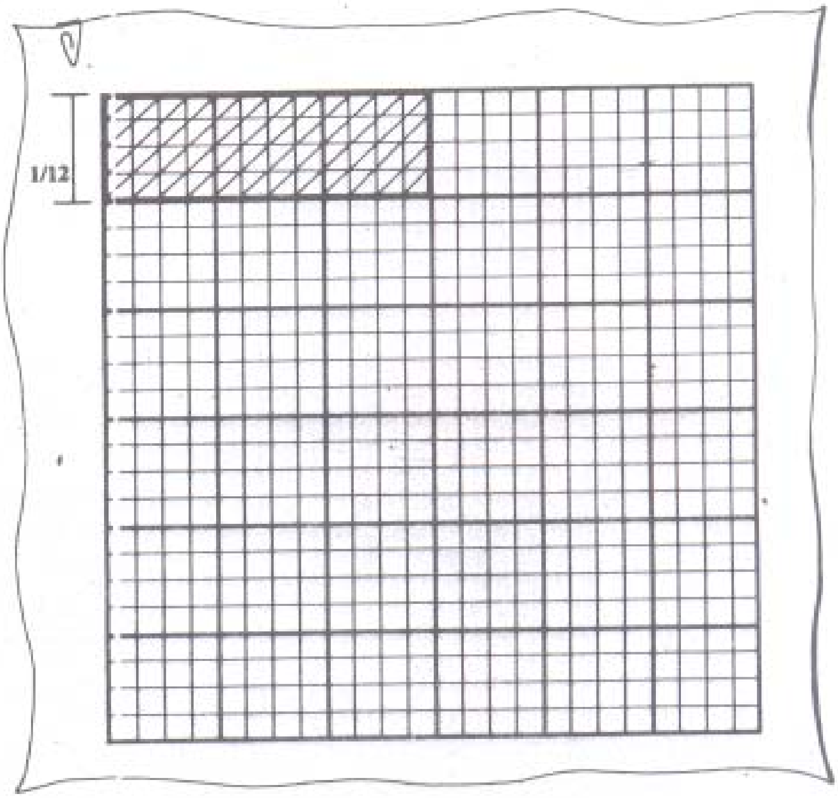
अब उनसे कहिए कि वे एक आयत (या वर्ग) लें जिसकी मदद से वे प्रत्येक रंग भरे क्षेत्र को ठीक–ठाक नाप सकें। शायद उन्हें आपकी मदद की ज़रूरत पड़े।

यहां मापन की इकाई में काफी विविधता उभर सकती है। कुछ छात्र इन रंगे हुए क्षेत्रों को एक इकाई से नाप सकते हैं जो पूरे वर्ग का $\frac{1}{24}$ हो (देखें चित्र 3(क))। कुछ छात्र $\frac{1}{12}$ और कुछ अन्य छात्र $\frac{1}{48}$ की इकाई भी ले सकते हैं (देखें चित्र 3(ख) और 3(ग))।

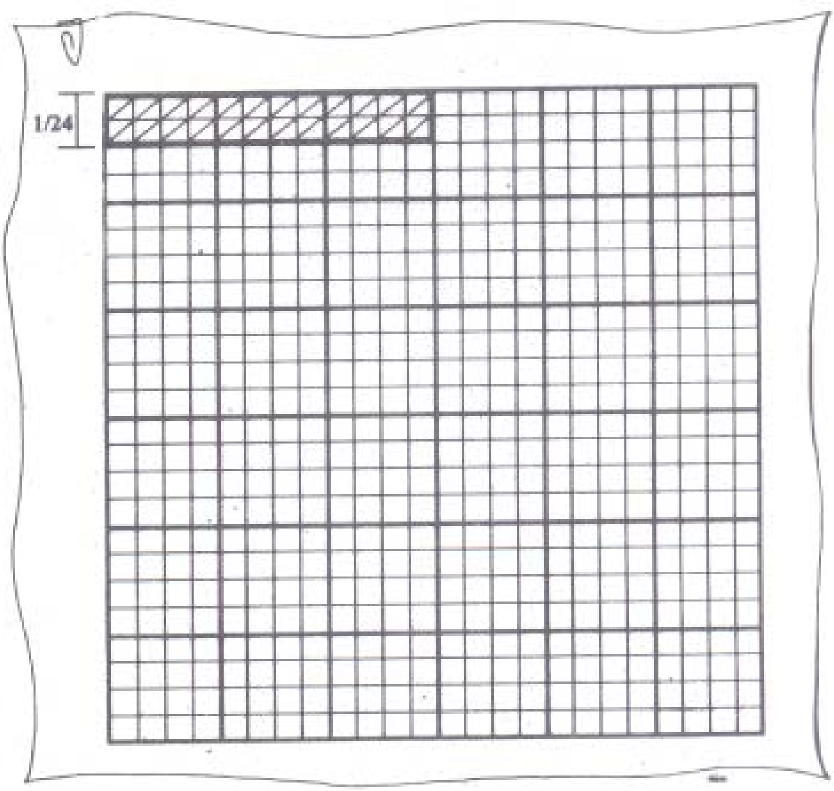
इस तरह वे देख पाएंगे कि $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{6}$ दोनों के तुल्य ऐसी भिन्नें होंगी जिनके हर समान होंगे। इन्हें जोड़ना वे जानते हैं।

अब पूरी कक्षा में उन बच्चों के साथ चर्चा कीजिए जिन्होंने अलग–अलग समान हर प्राप्त किए हैं। इस चर्चा से वे यह समझ पाएंगे कि जोड़ करने के लिए किसी भी समान हर का उपयोग किया जा सकता है। आप बच्चों को आगे चर्चा के लिए उत्सुक कर सकते हैं ताकि वे यह समझ पाएं कि क्यों ये 'अलग–अलग' उत्तर आ रहे हैं। इस चर्चा से वे यह समझ पाएंगे कि ये सारी भिन्न तुल्य हैं और वास्तव में हर के किसी भी गुणज का उपयोग किया

जा सकता है। इस अवसर का लाभ उठाकर आप इस बात पर भी ध्यान दे सकते हैं कि सबसे सुविधाजनक हर कौन–सा होगा। हो सकता है कि सबसे सुविधाजनक हर कभी तो सामान्य गुणज हो और कभी लघुत्तम समापवर्त्य।



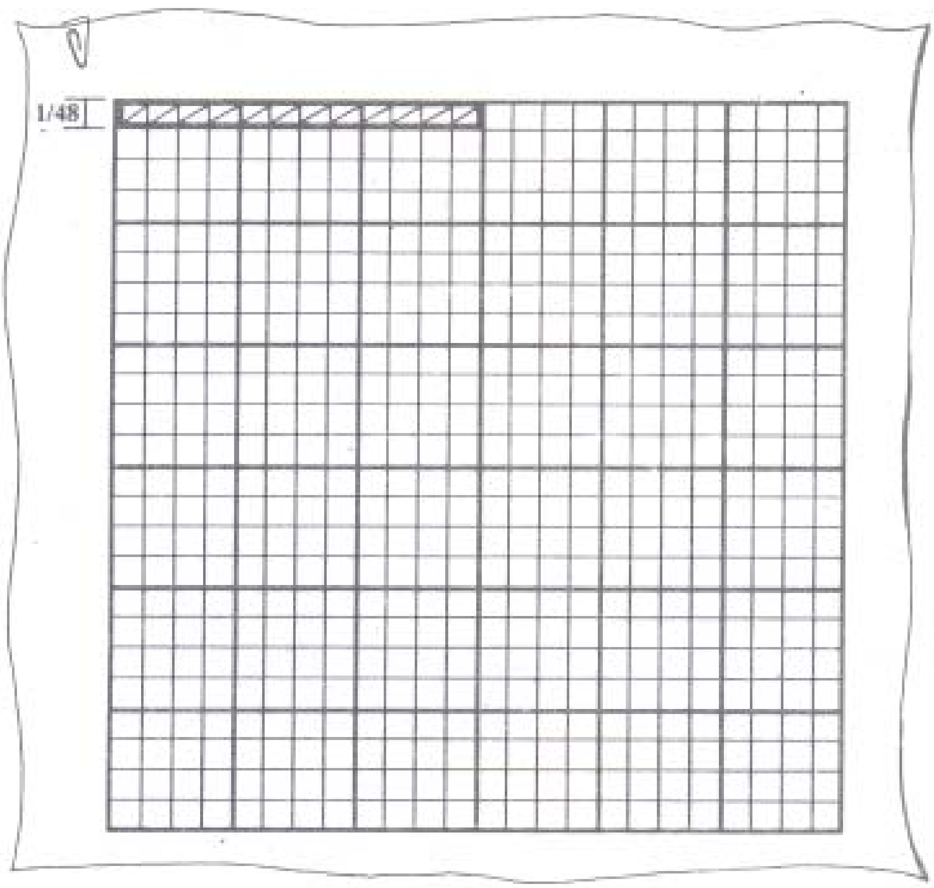
चित्र 3 (क)



चित्र 3 (ख)

E9) उपरोक्त गतिविधि का उपयोग आप अलग–अलग हर वाली भिन्नों की बाकी की सूत्रविधि समझाने के लिए कैसे करेंगे?

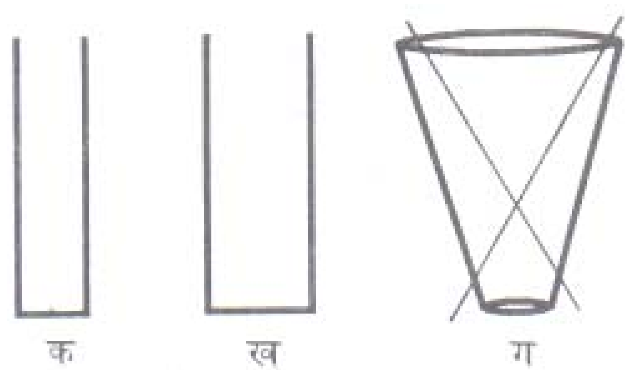
यदि आपने यह अभ्यास किया है, तो शायद आपको लगा होगा कि कुछ बच्चों को असमान भिन्नों के जोड़/बाकी पर पकड़ बनाने के लिए कुछ अन्य प्रकार की मदद की ज़रूरत होती है। इसके लिए मापक जार एक और साधन हो सकता है।



चित्र 3 (ग)

जैसा कि आप चित्र 4 में देख सकते हैं कि मापक जार पारदर्शी पदार्थ से बना एक बेलनाकार/आयताकार जार होता है। चित्र 4(ग) में दर्शाए जार का उपयोग इसके लिए नहीं किया जा सकता है।

चित्र 4(ग) को न लेकर 4(क) व 4(ख) में दर्शाए जार को लेने का कारण यह है कि इसमें बच्चे द्रव के आयतन और ऊंचाई का सम्बंध आसानी से देख सकते हैं। जैसे– जार में एक–तिहाई आयतन पानी की ऊंचाई जार की ऊंचाई की एक–तिहाई होगी।

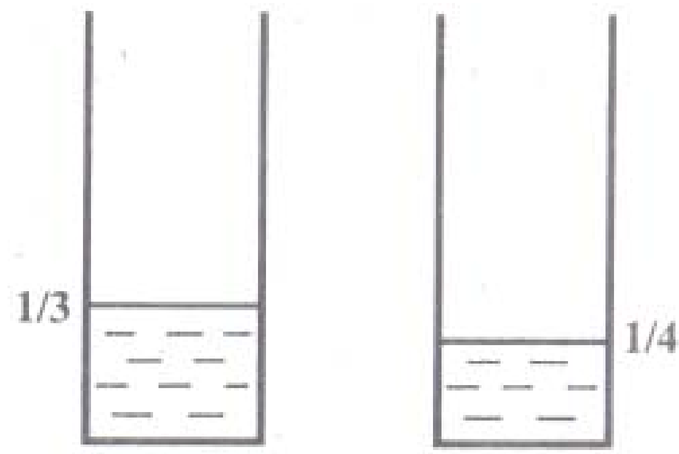


चित्र 4

अगले उदाहरण में बताया गया है कि कक्षा 4 की एक शिक्षक ने इस मापक जार की मदद से असमान भिन्नों की बाकी की चर्चा कैसे की।

उदाहरण 1 : शिक्षक इस कक्षा में 10 मापक जार लेकर आई। वे छात्रों को असमान भिन्नों की बाकी समझाना चाहती थीं। बच्चों ने विभिन्न भिन्नों की समझ विकसित करने के लिए इस मापक जार का उपयोग कई बार किया था।

शिक्षक ने यह समझाना शुरू किया कि $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ क्या होता है?' शिक्षक ने उन्हें '$\frac{1}{3}$ जार' और '$\frac{1}{4}$ जार' दिखाया (देखें चित्र 5)।



चित्र 5

आगे चर्चा निम्नानुसार चली :

शिक्षक : इन दो जारों को देखो। पहला जार $\frac{1}{3}$ भरा है और दूसरा $\frac{1}{4}$ भरा है मान लो मैं दूसरे जार का पानी पहले जार में डाल दूँ। अब पहले जार में कितना पानी होगा?

बच्चे : $\frac{2}{3}$

शिक्षक : कैसे?

बच्चे : आपने $\frac{1}{3}$ निशान के ऊपर पानी डाला। वह अगले निशान तक भर गया। तो यह $\frac{2}{3}$ है।

अब शिक्षक ने समझाया कि दोनों मापक जारों के भाग अलग–अलग हैं। इसके बाद उन्होंने बच्चों से पूछा कि दोनों मापक जारों का पानी मिला देने के बाद $\frac{2}{3}$ से कम होगा या ज़्यादा। कुछ बच्चों ने कहा कि पानी $\frac{2}{3}$ से कम होगा, जबकि शेष खामोश रहे।

शिक्षक : चलो, क्या तुम यह बता सकते हो कि पानी आधे से ज़्यादा होगा या आधे से कम?

बच्चे : आधे से ज़्यादा। नहीं एक मिनट, आधे से कम।

शिक्षक : चलो यह देखते हैं कि क्या पानी डालने से पहले हम उत्तर का अनुभव लगा सकते हैं। प्रत्येक जार में कितने भाग हैं?

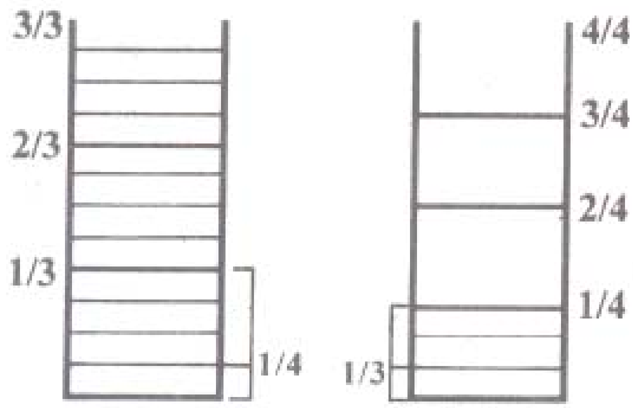
बच्चे : पहले जार में तीन भाग और दूसरे जार में चार भाग।

शिक्षक : तुम्हें यहां जोड़ने में कठिनाई आ रही है क्योंकि भाग बराबर नहीं हैं परन्तु मैं इन भागों को बांटकर भागों की संख्या बदल सकती हूँ। मान लो मैं पहला जार लेकर उसके प्रत्येक भाग को दो भागों में बांट दूं। तब मेरे पास कितने भाग होंगे?

बच्चे : छः भाग।

शिक्षक : सही। अब भी दोनों जारों के भाग बराबर नहीं हुए। सोचो इसके बारे में। पहले जार में तीन भाग और दूसरे जार में चार भाग हैं। यदि मैं पहले जार के प्रत्येक भाग को चार भागों में बांट दूं, तो कितने कुल हो जाएंगे?

बच्चे : (गणना करने में कुछ वक्त लेते हैं) बारह भाग।



चित्र 6

शिक्षक : अब यदि मुझे दूसरे जार पर भी 12 भाग चाहिए, तो प्रत्येक भाग को कितने भागों में बांटना होगा?

बच्चे : मैडम, प्रत्येक भाग को तीन छोटे–छोटे भागों में बांटना पड़ेगा।

शिक्षक : सही। यदि तुम पहले जार के प्रत्येक भाग को 4 भागों में और दूसरे जार के प्रत्येक भाग को 3 भागों में बांट दो, तो दोनों जारों पर 12-12 भाग हो जाएंगे।

बच्चें अपनी नोट बुक में बने जार के चित्रों के भागों को बांटकर देखते हैं कि दोनों जारों में 12-12 भाग बनते हैं।

एक बच्ची : (हाथ उठाते हुए) टीचर, पहले जार में 3 भाग हैं और हम प्रत्येक भाग को 4 भागों में बांटते हैं। दूसरे जार में 4 भाग हैं और हम प्रत्येक भाग को 3 भागों में बांटते हैं।

शिक्षक : अच्छा ध्यान दिया तुमने। मज़ेदार बात है, नहीं? क्या कोई मुझे बता सकता है कि यह क्यों काम कर जाता है–3 भागों में प्रत्येक के 4 भाग और 4 भागों में प्रत्येक के 3 भाग?

एक अन्य बच्ची : मैडम, क्योंकि 3×4 और 4×3 बराबर हैं।

शिक्षक : बहुत बढ़िया। तुमने वाकई कुछ खोज निकाला है। अब बताओ $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{4}$ को कैसे जोड़ेंगे?

बच्चे : (चुप)

शिक्षक : हमने जो छोटे भाग किए हैं उनके रूप में $\frac{1}{3}$ कितना है?

बच्चे : $\frac{4}{12}$ है।

शिक्षक : ठीक। और छोटे भागों के रूप में $\frac{1}{4}$ कितना है?

बच्चे : $\frac{3}{12}$ है।

शिक्षक : बढ़िया। क्या अब तुम $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{4}$ को जोड़ सकते हो?

शिक्षक ने उनसे कहा कि वे इसे अपनी–अपनी नोट बुक में लिख लें।

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ दोनों जार में भागों की समान संख्या = 12

$$\frac{1}{3}=\frac{1\times 4}{3\times 4}=\frac{4}{12}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1\times 3}{4\times 3}=\frac{3}{12}$$

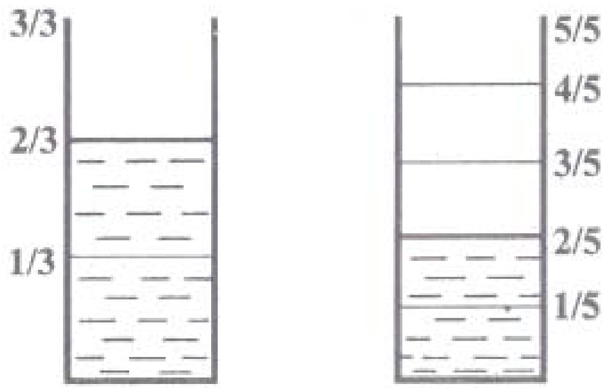
इसीलिए $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$

शिक्षक ने पूछा कि यह आधे से अधिक है या कम। कई बच्चे इस प्रश्न का उत्तर दे पाए।

मापक जार के साथ कुछ और ऐसे उदाहरणों की चर्चा के बाद शिक्षक ने उन्हें छोटी–छोटी भिन्नों के जोड़ के कई प्रश्न दिए। इस प्रक्रिया के दौरान वे उलट गुणित की विधि से परिचित हो गए। मापक जार का यह मॉडल शिक्षक को बहुत भाया क्योंकि उलट गुणित की प्रक्रिया का प्रत्येक चरण इससे मेल खाता है।

———x———

E10) बताइए कि आप मापक जार का उपयोग $\frac{2}{3}+\frac{2}{5}$ को हल करने के लिए कैसे करेंगे। चित्र नीचे दिए गए हैं।



चित्र 7

अगले उदाहरण में आप देखेंगे कि शिक्षक ने मापक जार का उपयोग ऐसी भिन्नों का जोड़ समझाने के लिए कैसे किया जिनके हरों के सामान्य गुणक हो।

उदाहरण 2 : शिक्षक ने प्रारम्भ $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$ से की।

शिक्षक : बच्चों, ये दो जार हैं। पहला $\frac{1}{4}$ भरा है और दूसरा $\frac{5}{6}$। क्या तुम बता सकते हो कि मै $\frac{1}{4}$ और $\frac{5}{6}$ को कैसे जोड़ू ?

बच्चे : हम पहले जार के प्रत्येक भाग को 6 भागों में और दूसरे जार के प्रत्येक भाग को 4 भागों में बांट सकते हैं।

शिक्षक : तब प्रत्येक जार पर कितने भाग होंगे?

बच्चे : (गिनकर) 24 भाग।

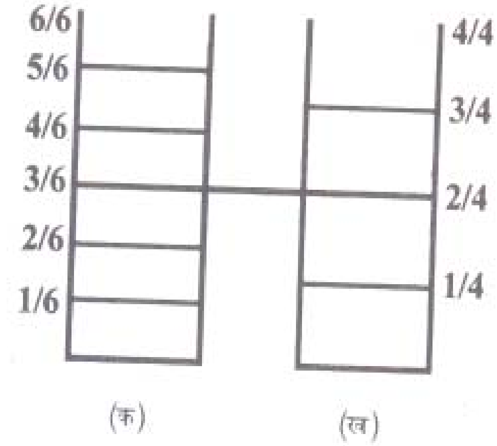
शिक्षक : ठीक। हां, इस प्रश्न को करने का यह एक तरीका है। परन्तु इसमें भागों की संख्या बहुत ज़्यादा हो जाएगी। क्या हम जारों को इससे कम भागों में बांटकर काम नहीं चला सकते?

बच्चे : (चुप)

शिक्षक : दोनों जार को देखो। क्या तुम्हें कोई निशान दोनों जारों में मेल खाते दिखते हैं?

बच्चे : हां, पहले जार का $\frac{2}{4}$ दूसरे जार के $\frac{3}{6}$ निशान से मेल खाता है।

शिक्षक : बढ़िया। अब इन दोनों जारों को मेल खाते निशानों तक देखते हैं (देखिए चित्र)। (शिक्षक मेल खाते निशानों पर एक लाइन खींच देती है।)



चित्र 8

अब बताओं कि मिलान रेखा तक दोनों जारों में कितने–कितने भाग हैं?

बच्चे : (क) जार में 3 भाग और (ख) जार में 2 भाग।

शिक्षक : बिल्कुल ठीक। मान लो कि मैं सिर्फ़ मिलान रेखा तक ही दोनों जारों में बराबर–बराबर बनाना चाहती हूं। इसके लिए क्या करना होगा?

बच्चे : (सोचकर) आप पहले जार (क) के प्रत्येक भाग को 2 भागों में और दूसरे जार (ख) के प्रत्येक भाग को 3 भागों में बांट सकती हैं। तब दोनों जारों में मिलान रेखा तक 6-6 भाग हो जाएंगे।

शिक्षक : बढ़िया। क्या अब तुम मिलान रेखा के ऊपर के भागों को भी इसी तरह बांट सकते हो?

बच्चे : हां, कर सकते हैं। ऊपर भी 6-6 भाग हो जाएंगे।

शिक्षक : तो दोनों जारों पर कुल कितने–कितने भाग हुए?

बच्चे : 12-12 भाग।

शिक्षक : अब तुम $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$ को जोड़ सकते हो?

बच्चे : हां, टीचर।

और उन्होंने अपनी–अपनी नोट बुक में इसे निम्नानुसार लिखा :

दोनों जारों में भागों की बराबर संख्या = 12

$4 \times 3 = 12$

$6 \times 2 = 12$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{10}{12}$$

इसीलिए

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3}{12} + \frac{10}{12} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$$

इसके बाद शिक्षक ने उन्हें समझाया कि इन्हें जोड़ते हुए वे 24 भागों का उपयोग भी कर सकते हैं और 12 भागों का भी। वास्तव में 4 और 6 का कोई भी सामान्य गुणज 'भागों की संख्या' के रूप में लिया जा सकता है। इस मौके पर शिक्षक ने उन्हें यह भी समझाया कि सबसे कम सामान्य गुणज को ही लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) भी कहते हैं। इस उदाहरण में लघुत्तम समापवर्त्य 12 है। अर्थात् वे यह प्रश्न लघुत्तम समापवर्त्य से भी कर सकते हैं।

इस तरह से शिक्षक ने उन्हें यह भान कराया कि जोड़ 'उलट गुणित' विधि से भी किया जा सकता है और 'लघुत्तम' विधि, से भी।

———————x———————

उपरोक्त उदाहरण में हमने देखा कि शिक्षक ने बच्चों को जोड़ की सूत्रविधि समझाने में मदद कैसे की।

अभी तक आपने जो कुछ अध्ययन किया था, उसके अलावा गतिविधि के तरीके से आपने देखा होगा कि भिन्नों को जोड़ने व घटाने की विधि का आधार यह है कि पहले समान हर वाली तुल्य भिन्नें पता लगाई जाएं।

यदि हम ये प्रश्न पूछें कि भिन्नों की सूत्रविधियों में इतनी छलांगे क्यों हैं और बच्चे उनमें इतनी गलतियां क्यों करते हैं, तो सबसे प्रमुख बात यह सामने आती है कि भिन्नों के मामले में बच्चों को यह सावधानी रखनी होती है कि जोड़ते समय बराबर आकार (साइज) के टुकड़ों को ही जोड़ें। यह बच्चों के लिए एक नई बात होती है क्योंकि उन्हें पूर्णांक संख्याओं को जोड़ने का अभ्यास है जो सदैव बराबर आकार की होती हैं। जोड़ व घटाना की विधियों का अभ्यास कर रहे बच्चों के लिए यह समझना ज़रूरी है कि सारी सम्बंधित भिन्नों में जो टुकड़े हों वे बराबर आकार के होने चाहिए। उलट गुणित या लघुत्तम निकालने या किसी भी अन्य विधि का उद्‌देश्य यही है।

अतः इसे समझने का पहला कदम भिन्नों की समझ से जुड़ा है। भिन्नों का अर्थ क्या है और कैसे अलग–अलग हरों वाली भिन्नें तुल्य हो सकती हैं? यह समझना भी आवश्यक है कि हर बढ़ने के साथ भिन्न छोटी होती जाती है। बच्चों को यह भी समझना होगा कि भिन्नों की तुलना करने से पहले उनके हरों को बराबर करना ज़रूरी होता है क्योंकि तभी तुलना किए जा रहे टुकड़े बराबर आकार के होते हैं। यही स्थिति जोड़ में भी होती है।

अगले खण्ड में हम गुणा और भाग की चर्चा करेंगे।

11.3.2 गुणा और भाग की सूत्रविधि

प्रक्रिया के अनुसार से देखें तो सम्भवतः भिन्नों के गुणा की सूत्रविधि सबसे आसान है। भिन्नों का गुणा करने के लिए मात्र इतना करना होता है कि अंशों और हरों का अलग–अलग गुणा कर लिया जाए। चूंकि गुणा की सूत्रविधि इतनी आसान है, इसलिए तर्क दिया जाता है कि इसमें अवधारणात्मक ज्ञान पर ध्यान देने की ज़रूरत नहीं है। किन्तु गुणा की क्रिया का अर्थ समझना कहीं ज़्यादा जटिल विषय है।

पूर्णांक संख्याओं में तो गुणा का अर्थ है बराबर समुच्चयों की एक निश्चित संख्या का जोड़। क्या यही परिभाषा भिन्नों पर भी लागू होती है? बच्चों को आप इस बात का आभास कैसे देंगे कि भिन्नों के गुणा का अर्थ क्या है? यह समझना तो शायद आसान हो कि $4\times\frac{1}{3}$ (या $\frac{1}{3}\times 4$) का अर्थ है '$\frac{1}{3}$ को 4 बार जोड़ना, मगर यह समझना काफी कठिन है कि '$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$' का अर्थ '$\frac{2}{3}$ को $\frac{1}{3}$ बार जोड़ना' होता है।

तो, ऐसे गुणा के बारे में क्या किया जाए? क्या आम जीवन में इनके कोई ठोस उदाहरण हैं? जैसे, आप बच्चों से पूछ सकते हैं कि यदि सोहन और मोहन के पास एक सेब था और दोनों ने इसे बराबर–बराबर बांटा तो प्रत्येक को कितना मिलेगा? और इसके पहले कि वे अपना–अपना भाग खा पाते, दो और दोस्त वहां आ धमके। मोहन और सोहन ने उन्हें भी सेब में से भाग देना तय किया। तो अन्त में मोहन को कितना सेब मिलेगा? यदि हम बच्चों के साथ इसका विश्लेषण करें तो देखते हैं कि मोहन को आधे का आधा मिलेगा। रघु से एक सेब लेकर और सलमा से आधा सेब और लेकर आप बच्चों को यह समझा सकते हैं और व्यक्त करवा सकते हैं कि ज़ुबैदा को दो आधे सेब यानी दो गुना आधा सेब मिला। इस तरह के उदाहरण लेकर तथा बच्चों से उदाहरण बनवाकर आप धीरे–धीरे यह समझने में मदद कर सकते हैं कि $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ का अर्थ होता है आधे का आधा और $2\times\frac{1}{2}$ का अर्थ होता है दो बार आधा आदि। बच्चों के साथ चर्चा के दौरान इसे धीरे–धीरे भिन्नों से गुणा का सामान्य रूप दिया जा सकता है। उन्हें यह समझाया जा सकता है कि गुणा का अर्थ 'का' भी होता है। दरअसल जब आप पूर्णांक संख्याओं की क्रियाएं करते हैं तो गुणा का अर्थ होता है कोई समुच्चय कितनी बार जबकि शुद्ध भिन्न से गुणा करने का अर्थ होता है किसी का इतना भाग।

अर्थात् किसी राशि या संख्या का आंशिक भाग लेने के लिए हम उसमें भिन्न से गुणा करते हैं। हम अक्सर इस बात को जाने बगैर ऐसा करते रहते हैं। आइए, ऐसी कुछ स्थितियां देखते हैं।

एक व्यंजन विधि में 5 लोगों के लिए कोई व्यंजन बनाने के लिए ज़रूरी चीज़े बताई गई हैं। यदि तीन लोगों के लिए बनाना हो, तो प्रत्येक चीज़ कितनी ली जाए? हां, इस मामले में थोड़ा लगभग से काम चल सकता है। या हमें 1 कि.ग्रा. प्याज़ के दाम पता हैं और हम $\frac{3}{4}$ कि.ग्रा. प्याज़ के दाम पता करना चाहते हैं। या 1 कट्टे चावल के दाम के आधार पर हम $\frac{2}{3}$ कट्टा चावल के दाम पता करना चाहें। या मान लीजिए कि 3 लोगों न मिलकर कोई

काम किया और आमदनी को उनके बीच बांटना है। यदि एक व्यक्ति ने $\frac{1}{5}$ काम किया है और शेष 2 ने मिलकर $\frac{2}{5}$ काम किया है, तो आमदनी का बंटवारा उनके योगदान के अनुपात में करना होगा। यह एक ऐसी स्थिति है जब एक ही राशि में अलग–अलग भिन्नों से गुणा करना होगा। अगला अभ्यास करते हुए आप ऐसी अन्य स्थितियां सोच सकते हैं।

E11) ऊपर दी गई स्थितियों से अलग, आम जीवन की दो ऐसी स्थितियां बताइए जहां भिन्नों से गुणा का उपयोग होता है। आम जीवन के उदाहरणों का उपयोग करते हुए आप बच्चों को भिन्नों से गुणा का अमूर्त्त अर्थ ग्रहण करने में कैसे मदद करेंगे?

भिन्नों से गुणा की संभव स्थितियों में आपने ध्यान दिया होगा कि बंटवारे की स्थितियों में भिन्नों से गुणा की ज़रूरत पड़ती है। बार–बार बंटवारा या भाग का भाग (जैसे– मुनाफे के $\frac{1}{5}$ भाग का $\frac{1}{3}$ भाग) जैसी स्थितियों में भी भिन्न से गुणा करना होता है।

इनमें से कई स्थितियां अवश्य ऐसी हैं जिनको भिन्नों के गुणा की सूत्रविधि का उपयोग किए बिना भी हल किया जा सकता है। हमारा कहना यह नहीं है कि ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिए भिन्नों के गुणा की सूत्रविधि जानना ज़रूरी है। मुद्दा वास्तव में यह है कि बच्चे इसकी अवधारणात्मक समझ विकसित करें ताकि वे ऐसी स्थितियों से विश्वासपूर्वक निपट सकें। इसके अलावा उनमें यह क्षमता विकसित होनी चाहिए कि वे इन स्थितियों का उपयोग करते हुए भिन्नों की अमूर्त धारणा तक पहुंच सकें। उनका सम्पर्क ऐसी स्थितियों से कराया जाना चाहिए और उन्हें एक सम्पूर्ण, एक संग्रह या एक राशि का आंशिक भाग लेते हुए इन स्थितियों से परिचित हो जाना चाहिए। भिन्नों के गुणा की सूत्रविधि को सीखना और उपयोग कराना इस प्रकार की स्थितियों से संपर्क का एक अवसर देता है। इससे इस प्रकार की स्थितियों से निपटने के लिए ज़रूरी समझ व हुनर सुदृढ़ करने में मदद मिलती है। सूत्रविधि की जानकारी सुविधा प्रदान करती है और अवधारणात्मक समझ सूत्रविधि के उपयोग को अर्थपूर्ण बना देती है।

उपरोक्त उदाहरणों को सावधानीपूर्वक समझते हुए हमने देखा कि भिन्नों का गुणा प्रक्रिया के स्तर पर तो आसान है किन्तु अवधारणा के स्तर पर जटिल है। इसका अर्थ यह है कि हमें क्रिया का अर्थ पढ़ाने से कतराना नहीं चाहिए। प्रारूपों के माध्यम से बच्चों का सम्पर्क इस बात से होना चाहिए कि भिन्नों से गुणा का अर्थ क्या है। किन्तु यह व्यावहारिक नहीं होगा कि उनसे गुणा के प्रत्येक उदाहरण को प्रारूप के रूप में प्रस्तुत करने को कहा जाए। हमें याद रखना चाहिए कि जटिल अवधारणाओं को समझने में समय लगता है।

जैसा कि हमने जोड़ के मामले में देखा था, गुणा की क्रिया में भी कई चरण होते हैं। इस क्रिया को समझने के लिए हमें इन सारे चरणों को अलग–अलग देखना होगा। ये चरण निम्नानुसार हैं :

1) एक इकाई भिन्न से पूर्णांक संख्या को गुणा करना। जैसे $\frac{1}{3} \times 2$

2) इकाई भिन्न को इकाई भिन्न से गुणा करना। जैसे $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

3) किसी उचित भिन्न को इकाई भिन्न से गुणा करना। जैसे $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$

4) एक उचित भिन्न को किसी दूसरी उचित भिन्न से गुणा करना। जैसे $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$

गुणा की क्रिया को समझने के लिए बच्ची को ये सारे चरण सीखने होंगे। एक बार गुणा की प्रक्रिया पर निपुणता पा ली हो तो भाग की प्रक्रिया सीखना काफी आसान है। किसी भिन्न से भाग का अर्थ है उसकी विलोम भिन्न से गुणा करना। यह काफ़ी सरल दिखता है। मगर खण्ड-1 में हम देख चुके हैं कि आंख मूंदकर सूत्रविधि का उपयोग करते हुए बच्चे बहुत सारी गलतियां करते हैं। यहां इस सम्बंध में कुछ सुझाव दिए जा रहे हैं।

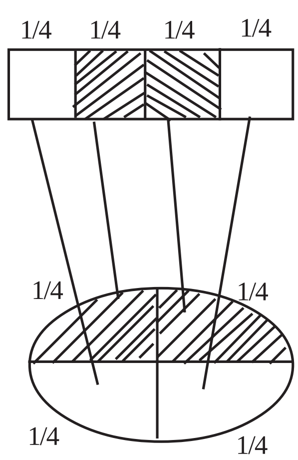
गुणा की अवधारणात्मक समझ के पक्ष में हमने जो तर्क दिए थे, वे अधिकांशतः भाग पर भी लागू होते हैं। हमने चर्चा की थी कि विभिन्न परिस्थितियों में किसी सूत्रविधि को कारगर ढंग से उपयोग कर पाने के लिए आवश्यक है कि बच्चों के पास सम्बंधित क्रिया का कुछ अवधारणात्मक ज्ञान हो। आप भाग के संदर्भ में यह आधार कैसे विकसित करेंगे? बच्ची को इसके लिए तैयार करने हेतु पूर्णांक संख्याओं के भाग से सम्बंधित दो प्रकार के अर्थों का पुनरावलोकन आवश्यक है।

1) भाग बतौर 'समूहीकरण' (यानी बारम्बार घटाना) के रूप में और

2) भाग 'बराबर वितरण'के रूप में

जैसे $12 \div 4$ की व्याख्या दो तरह से की जा सकती है—पहली, '12 चीज़ों का 4 के बीच बराबर—बराबर बंटवारा' और दूसरी, '12 में 4-4 के कितने समूह हैं?'

? क्या यही दो अर्थ भिन्नों पर लागू होते हैं, जैसे $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ के भी वही अर्थ हैं?



चित्र 9A

उदाहरण के लिए $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ लेते हैं। हम इसका अर्थ यह लगा सकते हैं: "इकाई भिन्न $\frac{1}{4}$ का 3 गुना इकाई भिन्न $\frac{1}{4}$ के दुगने के बीच बराबर बांटा गया"।

अब यदि हम चित्र 9A में दिखाए अनुसार $\frac{1}{4}$ को एक वस्तु के रूप में दर्शाएं तो इसका अर्थ होगा कि ऐसी 3 वस्तुओं को ऐसी ही 2 अन्य वस्तुओं के बीच बराबर—बराबर बांटना है। अर्थात् इन 2 वस्तुओं में से प्रत्येक को ऐसी $1\frac{1}{2}$ वस्तुएं मिलेंगी। ध्यान दें कि यहां वह वस्तु आंशिक भाग $\frac{1}{4}$ है। अतः उत्तर $1\frac{1}{2}$ है। यानी $\frac{3}{4} \div \frac{2}{4} = 1\frac{1}{2}$

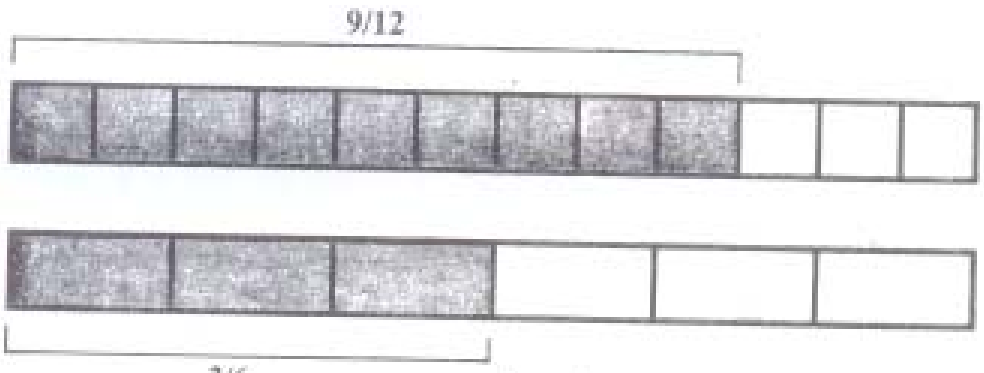
यह प्रक्रिया समझाना कठिन है। फिर भी यदि हम भिन्न चार्ट जैसे साधनों का उपयोग करें, तो हम यह प्रक्रिया आसानी से करके उत्तर प्राप्त कर सकते हैं। भिन्न चार्ट से आपका परिचय पहले हो ही चुका है।

इसी प्रकार से हम दूसरे अर्थ को भी समझ सकते हैं। क्यों न आप स्वयं यह कोशिश करें।

E12) समझाइए कि $3\frac{1}{4}$ में कितने $2\frac{1}{4}$ हैं? क्या आप बीजगणित की मदद से इसे हल कर सकते हैं?

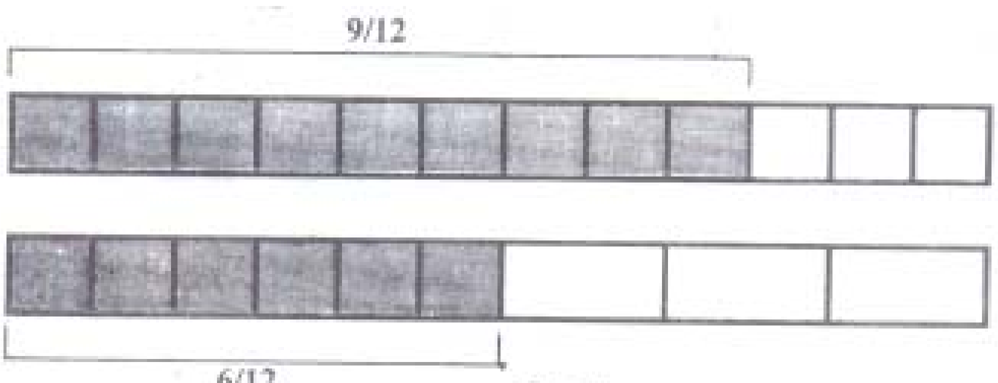
ध्यान दें कि इस्तेमाल किए गए उदाहरण $\frac{2}{4} \div \frac{1}{4}$ में दोनों की संख्याओं में हर बराबर था। आप अलग–अलग हर की भिन्नों पर इसे कैसे लागू करेंगे? जैसे, $\frac{9}{12} \div \frac{3}{6}$ पर ?

इसमें हम भाज्य $\frac{9}{12}$ को 9 मर्तबा $\frac{1}{12}$ के रूप में तथा भाजक $\frac{3}{6}$ को 3 बार $\frac{1}{6}$ के रूप में प्रकट कर सकते हैं। चित्र 9b में यही दिखाया गया है।



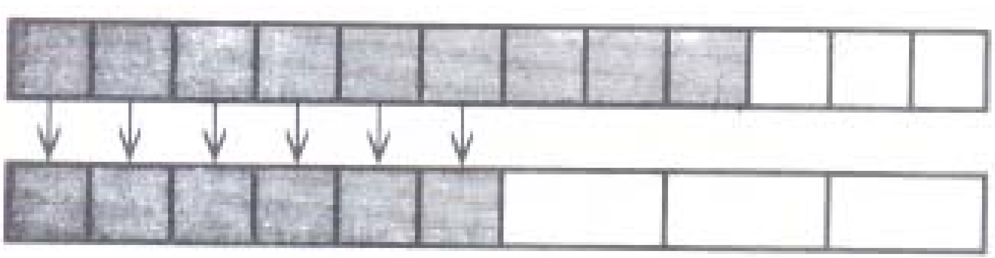
चित्र 9b

इसके बाद $3\frac{1}{6}$ को $6\frac{1}{12}$ के रूप में दिखाएं, जैसा कि चित्र 10 में बताया गया है।



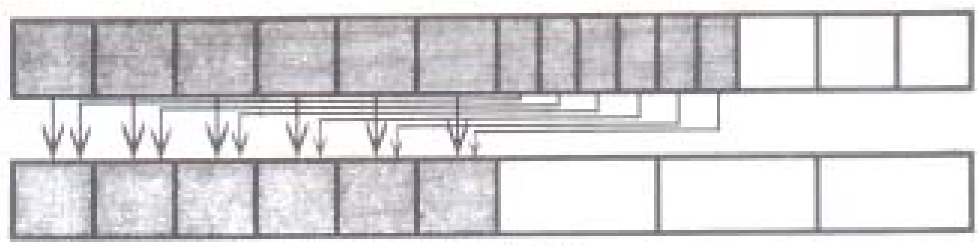
चित्र 10

अब भाज्य $9\frac{1}{12}$ में से एक–एक $\frac{1}{12}$ को भाजक $6\frac{1}{12}$ के प्रत्येक $\frac{1}{12}$ में बाँट दीजिए, जैसे चित्र 11 में दिया गया है।



चित्र 11

अब बचे भाजक के $3\frac{1}{12}$ इनमें से प्रत्येक को 2 बराबर भागों में बांटकर $\frac{1}{12}$ के छः $\frac{1}{2}$ बना लेंगे। इन छः $\frac{1}{12}$ के $\frac{1}{2}$ को भाजक के छः $\frac{1}{12}$ में 1-1 बांट देंगे, जैसा कि चित्र 12 में दर्शाया गया है।



चित्र 12

अब देखते हैं कि भाजक के $6\frac{1}{12}$ में से प्रत्येक को भाजक के कितने $\frac{1}{12}$ मिले हैं। यह है $1\frac{1}{2}$। अर्थात् $\frac{9}{12} \div \frac{3}{6} = 1\frac{1}{2}$ वितरण का नतीजा यह रहा कि प्रति भाजक $1\frac{1}{2}$ आया।

उपरोक्त चर्चा से आप समझ ही गए होंगे कि भिन्नों का भाग बच्चों के लिए एक अपेक्षाकृत कठिन अवधारणा है।

जैसा कि हमने ऊपर कहा था, आपको तुल्य भिन्न पता करने के लिए भी सूत्रविधि का उपयोग करना होता है। इसलिए आपको तुल्य भिन्न की सूत्रविधि से सम्बंधित अवधारणा की भी अच्छी समझ की ज़रूरत होगी।

उदाहरण $\frac{9}{12} \div \frac{3}{6}$ को ही लीजिए। यहां तो एक या दोनों भिन्नों को इस तरह बदलना सम्भव था कि दोनों के हर बराबर हो जाएं। उसके बाद भाज्य की इकाई भिन्नों को भाजक की इकाई भिन्नों में वितरित कर दिया गया। हम निम्नानुसार आगे बढ़ते हैं:

E13) आप अलग–अलग हरों वाली भिन्नों पर 'भाग बतौर बराबर वितरण' और 'भाग बतौर समूहीकरण' के अर्थ कैसे लागू करेंगे? जैसे $\frac{9}{12} \div \frac{3}{6}$ पर ?

गुणा की तरह भाग में भी कई चरण होते हैं। भाग की क्रिया को समझने के लिए इन चरणों का ध्यान रखना होता है। ये चरण हैं:

1) पूर्णांक संख्या में भिन्न का भाग

2) भिन्न संख्या में पूर्णांक संख्या का भाग

3) एक उचित भिन्न में दूसरी उचित भिन्न का भाग

4) एक असमान भिन्न में दूसरी असमान भिन्न का भाग

अब तक हमने भाग से जुड़ी सूत्रविधि की बात की। सूत्रविधि के मुद्दे से जुड़ा एक और महत्वपूर्ण पहलू अनुमान लगाने की क्षमता का है। अगले खण्ड में इसी की चर्चा की गई है।

11.4 अनुमान

एक दिन मैं अपने मित्र के घर गई तो देखा कि उसके दो बच्चे अप्पु और मिनी डोसा बनाने में लगे हैं। उन्होंने मुझे बताया कि मम्मा एक स्लेट पर आटे से डोसा बनाने के निर्देश लिखकर रख गई हैं। निर्देश कुछ यों थेः $\frac{1}{2}$ कप आटा, $\frac{2}{3}$ कप पानी। मिनी ने कहा कि वह $\frac{1}{2}$ कप आटा तो बड़ी आसानी से उस कप से नाप सकती है जो मम्मा हमेशा इस्तेमाल करती है। मगर उसे यह नहीं पता कि $\frac{2}{3}$ कप पानी कैसे नापे।

इस स्थिति पर ध्यान दीजिए। मिनी को $\frac{1}{2}$ कप आटा और $\frac{2}{3}$ कप पानी लेना था। उसके सामने सवाल यह था कि 'कप में कितना पानी भरे कि वह $\frac{2}{3}$ भर जाए।' बाद में पता चला कि और डोसे बनाना है तो उसे $\frac{1}{2}$ कप का $\frac{1}{2}$ आटा और लेना पड़ा और $\frac{2}{3}$ कप का $\frac{1}{2}$ पानी लेना पड़ा। अब वह सचमुच संकोच में थी क्योंकि उसे भिन्नों की क्रियाओं के परिणाम का अच्छा अनुमान कभी नहीं रहा था। इस काम में तो दादा को उसकी मदद करनी पड़ी।

आप इस कहानी से क्या सीखते हैं? महत्वपूर्ण बात यह उभरती है कि हमें किसी भिन्न के आकार (साइज़) का अनुमान लगाने की क्षमता विकसित करनी चाहिए। खास तौर से जब हम दैनिक जीवन में भिन्नों से काम करते हैं, तब तो यह क्षमता बहुत ज़रूरी हो जाती है। आइए कुछ आम स्थितियों पर विचार करें।

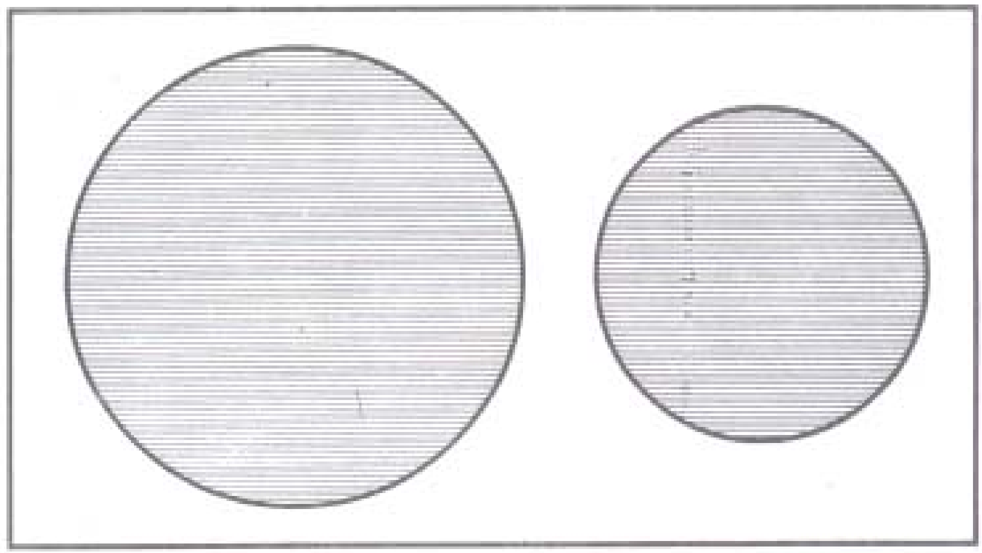
स्थिति 1ः सुषमा के पास कुछ पाने हैं जिन पर $\frac{3}{16}$ से.मी., $\frac{4}{16}$ से.मी....... $\frac{15}{16}$ से.मी. आदि लिखे हुए हैं। वह निम्नलिखित बातें जानना चाहती हैंः

i) उसके $\frac{3}{4}$ से. मी. के नट में 'सोलहवें भाग से.मी.' का कौन–सा पाना फिट होगा?

ii) एक और नट के लिए उसे $\frac{1}{2}$ से.मी. साइज़ से अगला साइज़ चाहिए। वह पाना कौन सा है?

स्थिति 2ः जैकब विद्यालय से $\frac{3}{4}$ मील की दूरी पर रहता है। घर से विद्यालय वह बस से आता है और लौटता पैदल है। मान लीजिए कि एक दिन बस की हड़ताल हो जाती है और उसे पैदल ही स्कूल आना पड़ता है। वह यह जानना चाहता है कि उसे घर से लगभग किस समय निकलना चाहिए? वह इतना जानता है कि उसे अपनी चाची के घर पहुंचने में 15 मिनट लगते हैं जो उसके घर से 2 कि.मी. दूर उल्टी दिशा में है।

स्थिति 3: विद्यालय में पर्यावरण अध्ययन के अन्तर्गत प्रोजेक्ट में एक बच्ची को एक वर्गाकार बोर्ड पर दो चकतियां बनानी हैं। यदि उसे यह पता है कि इन दो चकतियों का व्यास $6\frac{1}{2}$ से.मी. और $5\frac{3}{4}$ से.मी. होना चाहिए और इनके बीच कम से कम 1 से.मी. की दूरी होनी चाहिए (चित्र 13) तो उसे लगभग कितना लम्बा बोर्ड खरीदना चाहिए।



चित्र 13

उपरोक्त स्थितियां दर्शाती हैं कि कुछ संदर्भों में बच्ची को भिन्नों के परिमाण का अनुमान लगाना होता है ताकि यह पता चल सके कि कोई भिन्न कितनी बड़ी है। शायद किसी अन्य भिन्न से तुलना करने के लिए यह जानना ज़रूरी हो। किसी अन्य संदर्भ में हो सकता है कि बच्चों को दो भिन्नों के योग/अन्तर का अनुमान लगाने की ज़रूरत हो या किसी समुच्चय के आंशिक भाग का अनुमान लगाने की ज़रूरत पड़े। अर्थात् उन्हें भिन्नों की क्रियाओं के परिणाम का अनुमान लगाने की ज़रूरत पड़ सकती है। अतः यह आवश्यक है कि बच्ची भिन्नों का अनुमान लगाने के गुरों से परिचित हो। आइए देखते हैं कि अगले उदाहरण में शिक्षक बच्चों को भिन्नों का अनुमान लगाने की क्षमता का विकास करने में मदद देती हैं।

उदाहरण 3 : प्राथमिक विद्यालय की शिक्षक विनीता ने यह समझ लिया था कि बच्चों को भिन्न सिखाने का एक महत्वपूर्ण पहलू यह है कि उनमें भिन्न के आकार का अनुमान लगाने की क्षमता विकसित की जाए। इसके लिए उसने पहले यह पता किया कि क्या उसके छात्रों को $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ जैसी सरल भिन्नों के आकार का अनुमान है। इसकी जांच के लिए उसने बच्चों को तरह–तरह के प्रश्न दिए। इसके बाद उसने उन्हें निम्नलिखित प्रश्न दिया।

कमरे में एक वर्गाकार मेज़ है और वह चाहती है कि छात्र एक छड़ की मदद से उसकी लम्बाई नापें। उसने एक छात्रा अनु को बुलाया। अनु ने मेज़ की लंबाई नापी और बताया कि लंबाई 5 पूरी छड़ और छड़ के थोड़े–से भाग के बराबर है। शिक्षक ने अनु से इस भाग पर निशान लगाने को कहा। फिर उसने बोर्ड पर लिखाः

मेज़ की लंबाई = 5 छड़ + छड़ का एक भाग

अब शिक्षक ने पूछा, निशान लगा भाग कितना है—क्या यह छड़ के $\frac{1}{2}$ से कम है या $\frac{1}{2}$ से ज़्यादा है?

कुछ बच्चों ने कहा, $\frac{1}{2}$ से ज़्यादा।

शिक्षक ने कहा, 'ठीक'।

एक बच्ची ने कहा कि 'वास्तव में यह भाग छड़ के $\frac{3}{4}$ से भी ज़्यादा है।

शिक्षक बोली, बहुत बढ़िया। तब क्या मैं कह सकती हूं कि मेज की लंबाई लगभग छः छड़ है?

बच्चे सहमत थे।

अब शिक्षक ने एक और वर्गाकार मेज़ दिखाकर उसकी भी लंबाई नापने को कहा। उसने लंबाई इस प्रकार लिखी

लम्बाई = 5 छड़ + छड़ का एक भाग

शिक्षक ने पूछा, यह भाग कितना है ?

बच्चों ने कहा कि यह छड़ का $\frac{1}{4}$ है।

तो यदि मैं कहूं कि लम्बाई लगभग '6 छड़' है तो क्या तुम मानोगे ?

कुछ बच्चों ने कहा, नहीं

शिक्षक ने पूछा, क्यों?

एक बच्ची ने कहा कि लम्बाई 5 छड़ और एक छड़ का थोड़ा सा भाग ही है। यह भाग छड़ की पूरी लम्बाई से बहुत ही कम है। शिक्षक बच्ची के तर्क से सहमत हुई और उसने यह बात पूरी कक्षा को और स्पष्ट कर दी। अब उसने दोनों लम्बाइयां लिखीः

लम्बाई I = 5 छड़ + भाग

लम्बाई II = 5 छड़ + भाग

उसने समझाया कि पहले मामले में भाग लगभग पूरी छड़ के बराबर था जबकि दूसरे मामले में वह भाग इतना छोटा था कि हम उसे छोड़ सकते हैं।

यदि हम ज़्यादा सही ढंग से करना चाहें, उसने समझाया, तो यदि कोई भाग $\frac{1}{2}$ से ज़्यादा हो तो हम लगभग करके 1 मान लेते हैं जबकि $\frac{1}{2}$ से कम होने पर उसे शून्य मानते हैं।

उदाहरण के लिए, पहले मामले में भाग $\frac{1}{2}$ से ज़्यादा था, इसलिए हमने उसे अगली संख्या $5 + 1 = 6$ तक सन्निकटन कर दिया। दूसरे मामले में वह भाग आधे से कम था, इसलिए हम उसका सन्निकटन $5 + 0 = 5$ किया।

इस गतिविधि के ज़रिए शिक्षक ने बच्चों को यह सझाने में मदद दी कि उनके लिए यह जानना बहुत ज़रूरी है कि कौन–सी भिन्नें 0 के करीब हैं, कौन–सी $\frac{1}{2}$ के करीब हैं, और कौन–सी 1 एक के करीब हैं। यह पता होने पर ही वे भिन्नों का अच्छा अनुमान लगा पाएंगे। जैसे– भिन्न $\frac{7}{8}$ दी जाए, तो उन्हें यह अनुमान लगाना आना चाहिए कि वह 0, 1, $\frac{1}{2}$ में से किसके अधिक करीब है। इस पहलू को विकसित करने के लिए शिक्षक ने उन्हें कई प्रश्न दिए, जैसे : शिक्षक ने बोर्ड पर प्रश्न लिखा।

प्र. : निम्नलिखित भिन्नों को पूरा करो ताकि वे $\frac{1}{2}$ के करीब हों किन्तु उससे ज़्यादा रहें

$$\frac{\square}{8} \quad \frac{\square}{11} \quad \frac{\square}{13} \quad \frac{\square}{21} \quad \frac{9}{\square} \quad \frac{3}{\square} \quad \frac{6}{\square}$$

इसके बाद शिक्षक चाहती थी कि बच्चों की गणनाओं के अपेक्षित उत्तर का अनुमान लगाने की क्षमता विकसित होनी चाहिए। इसके लिए उसने बच्चों को निम्नलिखित प्रश्न दिया।

प्र. : सूत्रविधि का उपयोग किए बगैर पता लगाओं कि

$\frac{8}{9} + \frac{9}{11} = \frac{17}{11}$ सही है या नहीं।

कुछ बच्चों ने तो कोई उत्तर नहीं दिया। कुछ बच्चों ने कहा कि यह ग़लत है मगर वे इसका कोई कारण नहीं दे पाए। इसी बीच मीरा ने यह कारण बताया।

उसने कहा,

$\frac{8}{9}$ तो 1 से कम है।

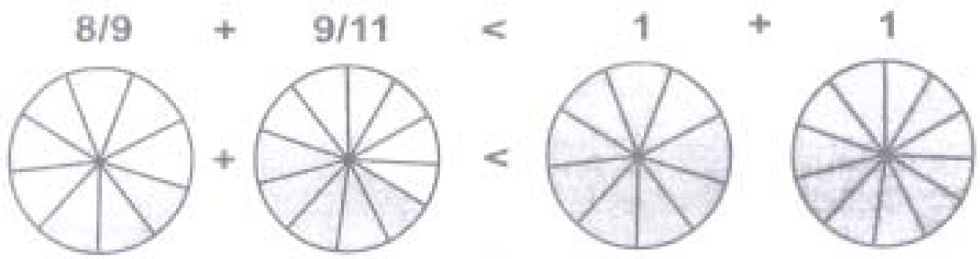
$\frac{9}{11}$ भी 1 से कम है।

इसलिए मुझे लगता है कि जोड़ 2 से कम होना चाहिए। शिक्षक ने पूछा कि उसे ऐसा क्यो लगता है?

मीरा ने कहा कि जब दोनों ही 1 से कम हैं तो उनका जोड़ भी 2 से कम होगा।

शिक्षक ने इस बात को पूरी कक्षा के लिए निम्नानुसार स्पष्ट किया:

मान लो इन दोनों को जोड़ा जाए तो यह इस प्रकार होगा।



चित्र 14

इसलिए जोड़ 2 से कम आएगा।

फिर उसने पूछा, मान लो तीन ऐसी भिन्नों (शुद्ध भिन्नों) को जोड़ा जाए तो जोड़ कितना होगा और क्यों?

छात्रों ने कहा, जोड़ 3 से कम होगा।

अब उसने निम्नलिखित सवाल बोर्ड पर लिखाः

प्र. : मान लो दो भिन्नें हैं, दोनों $\frac{1}{2}$ से कम हैं। यदि इन्हें जोड़ा जाए तो जोड़ .... होगा। क्यों?

कुछ बच्चों ने इसका सही उत्तर दे दिया जबकि अन्य बच्चों को उत्तर खोजने में शिक्षक ने मदद दी।

इसके बाद उसने इसी सी सम्बंधित कई और प्रश्न दिए। अपने अनुभव से शिक्षक ने समझ लिए कि अनुमान का कौशल विकसित करने के लिए ज़रूरी है कि बच्ची को चारों क्रियाओं से सम्बंधित तरह–तरह के प्रश्न करवाए जाएं और लम्बे समय तक इसका अभ्यास करवाया जाए।

———x———

उदाहरण 3 में एक गतिविधि का विवरण था। शिक्षक ने इसका उपयोग भिन्नों के अनुमान की क्षमता के विकास हेतु किया था। अगला अभ्यास करते हुए आप कुछ और ऐसी ही गतिविधियों के बारे में सोच सकते हैं।

E14) आप किसी बच्ची को किसी संख्या के अंश का अनुमान लगाने में कैसे मदद करेंगे ? जैसे 720 को $\frac{23}{49}$

इसके साथ हम भिन्नों से सम्बंधित सूत्रविधियों की चर्चा समाप्त करते हैं। अब जल्दी से एक नज़र डाल लें कि इस इकाई में हमने क्या–क्या किया।

11.5 सारांश

इस इकाई में हमने

1) चर्चा की कि भिन्नों पर सूत्रविधियों का उपयोग करते समय बच्चे ग़लतियां क्यों करते हैं?
2) इस बात को रेखांकित किया कि सूत्रविधियां सीखने–सिखाने के लिए भिन्नों की क्रियाओं का अवधारणात्मक ज्ञान ज़रूरी है।
3) सुझाव दिया कि सूत्रविधियों की कार्य प्रणाली को समझने के लिए शिक्षण साधनों का उपयोग किया जा सकता है।
4) यह चर्चा की कि बच्चों में भिन्नों का अनुमान लगाने की क्षमता कैसे विकसित की जाए।

11.6 अभ्यासों पर टिप्पणियां

E2) नहीं। जैसे $\frac{a}{b}$ की तुल्य भिन्न पता करने की सूत्रविधि निम्न है।

$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$ जहां c, 0 के अलावा कोई भी पूर्णांक संख्या हो सकती है।

E3) 199×5 पर ध्यान दीजिए। यदि हम अवधारणात्मक ज्ञान का उपयोग करें कि $199 = 200 - 1$ तो उत्तर 995 निकालना आसान है। यदि गुणा की विधि से चलेंगे तो ज़्यादा कठिन होगा।

E4)
1) प्रक्रिया में बहुत मेहनत लग सकती है
2) हो सकता है कि बच्चे अपनी ग़लतियां न पकड़ पाए
3) बच्चों की रुचि खत्म हो सकती है।
4) हो सकता है कि बच्चे सम्बंधित अवधारणाओं और प्रक्रियाओं के बीच का सम्बन्ध ही न देख पाए।

E5) हां। उदाहरण के लिए यदि 50 को इस रूप में दर्शाना है तो हम 2 की उस सबसे बड़ी घात को लेंगे जो 50 को बांट सके। यह है $32 = 2^5$। अब बचा 18 और 18 को बांटने वाली 2 की सबसे बड़ी घात है $16=2^4$। बचा $2 = 2^1$. तो $50 = 32 + 16 + 2$.

E6) संख्याओं को जोड़ने की क्षमता और यह तथ्य जोड़ पर गुणा का विकलन होता हैः यानी $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

E7) उत्तर II में उसने अंश की संख्या प्राप्त करने के लिए समान भिन्नों से सम्बंधित विधि का उपयोग किया। किन्तु हर के मामले में उसने असमान भिन्नों की विधि लागू कर दी।

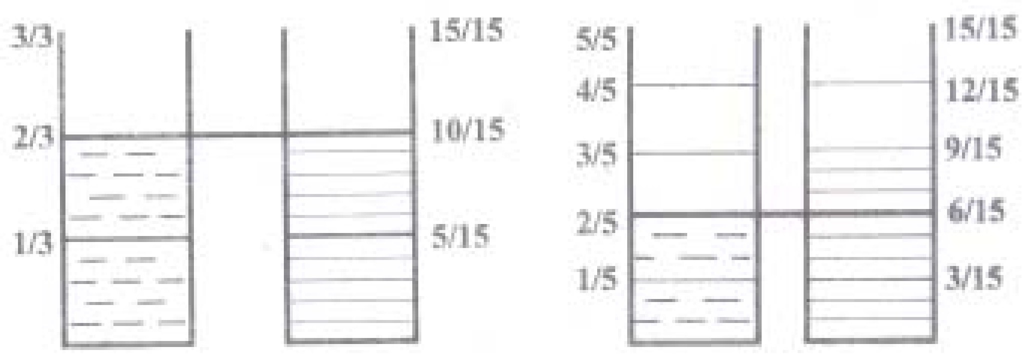
इसी प्रकार से आप उत्तर 1 का विश्लेषण कर सकते हैं।

E9) मान लीजिए आप $\frac{1}{8}-\frac{1}{12}$ दर्शाना चाहते हैं। बड़े चौखाने वाले दो ग्राफ कागज़ लीजिए। प्रत्येक कागज़ पर एक ही साइज़ के बड़े–बड़े वर्ग बनाइए। अब उनसे कहिए कि एक वर्ग में $\frac{1}{8}$ भाग तथा दूसरे में $\frac{1}{12}$ भाग में रंग भरें।

अब उनसे कहिए कि एक छोटा वर्गाकार टुकड़ा लें, जिसकी मदद से वे इन दोनों क्षेत्रों को नाप सकें। मान लीजिए वे $\frac{1}{24}$ लाते हैं। तो उनसे पूछिए कि उन्होंने $\frac{1}{8}$ को $\frac{1}{24}$ से कैसे नापा। इसके लिए $\frac{1}{24}$ का क्षेत्रफल $\frac{1}{8}$ पर चिपकाया जा सकता है। इससे $\frac{3}{24}$ मिलेगा।

इसी प्रकार से वे यह देख सकते हैं कि $\frac{1}{12}$ का क्षेत्रफल $\frac{1}{24}$ के क्षेत्रफल से दो गुना है यानी $\frac{1}{12}$ और $\frac{1}{24}$ तुल्य हैं। अब उनसे $\frac{3}{24}-\frac{1}{12}$ पता करने को कहिए। यह $\frac{1}{12}$ है। अर्थात् $\frac{1}{8}-\frac{1}{12}=\frac{3}{24}-\frac{2}{24}=-\frac{1}{24}$। इसी तरह से वे $\frac{1}{48}$ आदि भी आजमा सकते हैं।

E10 एक जार में $\frac{2}{3}$ और दूसरे जार में $\frac{2}{5}$ पानी भरिए। दोनों जार पर बने भाग बराबर नहीं हैं। इन्हें बराबर करने के लिए पहले जार के प्रत्येक भाग को 5 भागों में और दूसरे जार के प्रत्येक भाग को 3 भागों में बांट दीजिए। आप देखेंगे कि प्रत्येक जार पर अब 15 भाग हैं। यानी $\frac{2}{3}$, $\frac{10}{15}$ के तुल्य है और $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{15}$ के तुल्य है। (देखें चित्र 17)

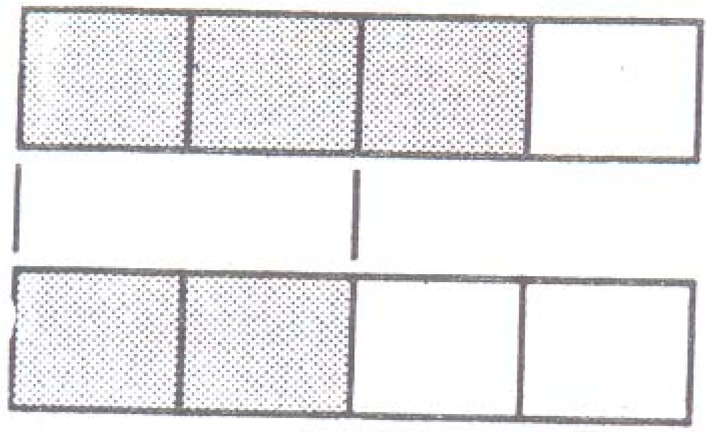


चित्र 17

अब हम $\frac{10}{15}$ में से $\frac{6}{15}$ घटाकर $\frac{4}{15}$ प्राप्त कर सकते हैं।

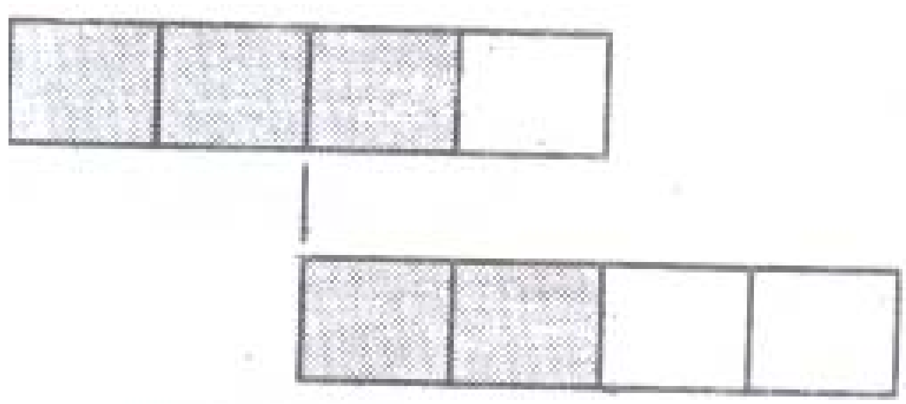
E12) 1) भाज्य $\frac{3}{4}$ को एक इकाई पर $3\frac{1}{4}$ के रूप में तथा भाजक $\frac{2}{4}$ को एक अन्य इकाई पर $2\frac{1}{4}$ के रूप में दर्शाइए।

चित्र 18 में दर्शाए अनुसार ये इकाइयां समान आकार की हों।



चित्र 18

2) भाजक की $2\frac{1}{4}$ की राशि का उपयोग भाज्य की $3\frac{1}{4}$ की राशि के मापन में कीजिए। इससे यह स्थापित होगा कि $3\frac{1}{4}$ का नाप $2\frac{1}{4}$ के मान से कम से कम 1 है। अब भाज्य के शेष भाग को नापिए और पता लगाइए कि $2\frac{1}{4}$ मापन इकाई के हिसाब़ से यह $\frac{1}{2}$ है जैसा कि चित्र 19 में दिखाया गया है। अतः कुल माप और $\frac{3}{4} \div \frac{2}{4}$ का उत्तर $1\frac{1}{2}$ है।



चित्र 19